Aufgabe 1

Schritt 1: Pfadregeln anwenden für a) und b)

Baumdiagramm ergänzen

Vom Ausgangspunkt ganz links gehen zwei Pfade aus, einer davon mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$. Der andere Pfad muss daher die Wahrscheinlichkeit $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ haben.

In der 2. Stufe des Experiments gehen von den zwei Ausgangssituationen „W“ und „S“ wieder jeweils zwei Pfade aus, deren Wahrscheinlichkeiten sich zu 1 ergänzen müssen. Somit kommt unter jedem Klecks der Eintrag $1-\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$.

Wahrscheinlichkeiten für jedes der vier Ereignisse berechnen.

$$P(\text{WW})=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{4}{9}},$$

$$P(\text{WS})=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{9}},$$

$$P(\text{SW})=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{2}{9}}\text{ und}$$

$$P(\text{SS})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{9}}.$$

Schritt 2: Gegenereignis untersuchen für c)

Gegenereignis $\overline{\text{E}}$ „Kein S wird gezogen“ entspricht dem Fall „WW“.

$$\Longrightarrow P(E)=1-P(\overline{E})=1-P(WW)=1-\frac{4}{9}=\mathbf{\frac{5}{9}}.$$

Schritt 3: Passendes Modell wählen für d)

Da sich das Baumdiagramm zweimal verzweigt, handelt es sich um zweimaliges Ziehen. Da der Anteil der weißen Kugeln auf jeder Stufe des Experiments gleich bleibt $\left(\frac{2}{3}\right)$, wird hier mit Zurücklegen gezogen.

Es handelt sich also um Z1: **Zweimaliges Ziehen mit Zurücklegen.**

Aufgabe 2 a)

Schritt 1: Gegenereignis und Kombinatorik einsetzen

Gegenereignis K „kein Schmuggler wird erwischt“:

$$P(kein\ Schmuggler) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{12}$$

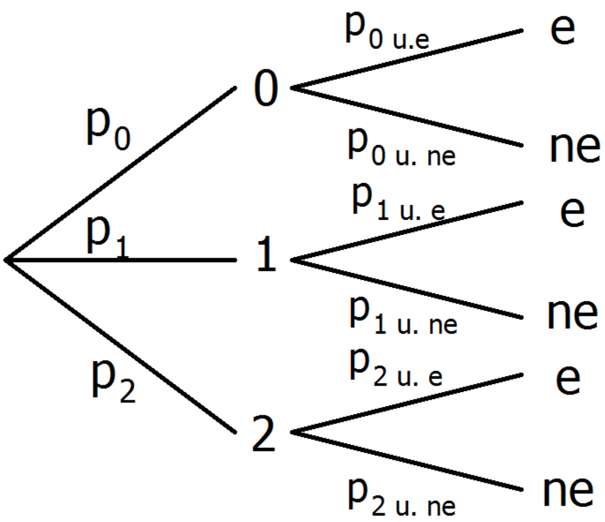
$$P(mindestens\ ein\ Schmuggler) = 1 - P(K) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindesteins ein Schmuggler erwischt wird, liegt bei $\frac{7}{12}$

Aufgabe 2 b)

Schritt 1: Baumdiagramm erstellen und auswerten



Im ersten Schritt stellt sich heraus, ob 0, 1 oder 2 Schmuggler kontrolliert werden und im zweiten Schritt entscheidet sich, ob mindestens ein Schmuggler erwischt wird (Fall „e“) oder nicht (Fall „ne“): mit

$p_0 = P(\text{kein Schmuggler kontrolliert}) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{12}$ (s. Aufgabenteil a)

$$p_1 = P(\text{ein Schmuggler kontrolliert}) = \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} + \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$p_2 = P(\text{zwei Schmuggler kontrolliert}) = 1 - p_0 - p_1 = 1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Wenn kein Schmuggler kontrolliert wird, ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer erwischt wird, natürlich gleich null. Wenn ein Schmuggler kontrolliert wird, beträgt diese Wahrscheinlichkeit 75 %. Falls zwei Schmuggler kontrolliert werden, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass keiner erwischt

wird
$(1-75\%)^2 = \frac{1}{16}$, die Gegenwahrscheinlichkeit also $\frac{15}{16}$.

Schritt 2: Pfadregeln anwenden

Es gibt zwei Pfade im Baumdiagramm, die dazu führen, dass mindestens ein Schmuggler erwischt wird, nämlich die Pfade 1e und 2e mit Wahrscheinlichkeiten $P(1\mathrm{e}) = p_1 \cdot 75\% = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ und

$P(2\mathrm{e}) = p_2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{12} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{4 \cdot 16} = \frac{5}{64}$.

Insgesamt beträgt also die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$P(1\mathrm{e}) + P(2\mathrm{e}) = \frac{3}{8} + \frac{5}{64} = \frac{24}{64} + \frac{5}{64} = \mathbf{\frac{29}{64}}$.

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schmuggler erwischt wird, ändert sich zu $\frac{29}{64}$, wenn der Zöllner einen Schmuggler nur zu 75% überführt.

Aufgabe 3 a)

Schritt 1: Körper in einfache Teilkörper zerlegen

Das Silo besteht aus einem Zylinder (mit Deckel) und einem nach oben geöffneten Kegel. Mithilfe der Volumen- und Flächenformeln kannst du zunächst das Volumen und die Oberfläche von Zylinder und Kegel separat berechnen und sie dann addieren.

Schritt 2: Teilvolumina berechnen

Volumen des Zylinders berechnen

$V_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h_Z$ (Formel für die Volumenberechnung eines Zylinders)

$V_Z = \pi \cdot (2{,}9\ m)^2 \cdot 7\ m$

$V_Z = \pi \cdot 8{,}41\ m^2 \cdot 7\ m$

$V_Z \approx 184{,}9\ m^3$

Volumen des Kegels berechnen

$V_K = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h_K$ (Formel für die Volumenberechnung eines Kegels)

$V_K = \frac{1}{3}\pi \cdot (2{,}9\ m)^2 \cdot 2{,}5\ m$

$V_K = \frac{1}{3}\pi \cdot 21{,}025 m^3$

$V_K \approx 22\ m^3$

Schritt 3: Zusammenrechnen der Volumina

$V_{Silo} = V_Z + V_K \approx 184{,}9\ m^3 + 22\ m^3 \approx \mathbf{206{,}9\ m^3}$

Schritt 4: Flächeninhalte der Teilflächen berechnen

Oberfläche des Zylinders berechnen

Die Oberfläche des zylindrischen teils setzt sich aus dem Zylindermantel und dem Zylinderdeckel zusammen.

$A_{Zylindermantel} = 2\pi \cdot r \cdot h_Z$ (Formel für die Berechnung eines Zylindermantels)

$A_{Zylindermantel} = 2\pi \cdot 2{,}9\ m \cdot 7\ m$

$A_{Zylindermantel} \approx 127{,}5\ m^2$

$A_{Deckel} = \pi \cdot r^2$ (Formel für die Kreisflächenberechnung)

$A_{Deckel} = \pi \cdot (2{,}9\ m)^2$

$A_{Deckel} \approx 26{,}4\ m^2$

Mantelfläche des Kegels berechnen

$A_{Kegelmantel} = \pi \cdot r \cdot s$ (Formel für die Berechnung eines Kegelmantels, s: Länge der Schräge zwischen Spitze und Kreisrand, die du mithilfe des Satz des Pythagoras berechnest)

$A_{Kegelmantel} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{h_K^2 + r^2}$

$A_{Kegelmantel} \approx 34{,}9\ m^2$

Schritt 5: Zusammenrechnen der Flächen

$A_{Silo} = A_{Zylindermantel} + A_{Deckel} + A_{Kegelmantel}$

$A_{Silo} \approx 127{,}5\ m^2 + 26{,}4\ m^2 + 34{,}9\ m^2$

$A_{Silo} \approx \mathbf{188{,}8\ m^2}$

Lösung:

Das Silo hat ein Volumen von $\mathbf{206{,}9\ m^3}$ und einen Oberflächeninhalt von $\mathbf{188{,}8\ m^2}$.

Aufgabe 3 b)

Schritt 1: Herausragenden Teil berechnen

Zunächst musst du überprüfen, ob nur der kegelförmige Teil in der Erde verschwindet.

Wenn 30% des Silos im Boden verschwinden, dann verschwinden 62,07 m^3 im Boden und es ragen noch $144,83\ m^3$ aus der Erde, d.h. der gesamte Kegel und ein Teil des Zylinders verschwinden im Boden. Von den im Boden versenkten 62,07 m^3 entfallen 22 m^3auf den Kegel.

Schritt 2: Höhe berechnen

$144{,}83m^3 = \pi \cdot (2{,}9\ m)^2 \cdot h$

$144{,}83\ m^3 = 26,42\ m^2 \cdot h$ (nach h umstellen)

$h = 5{,}48\ m$

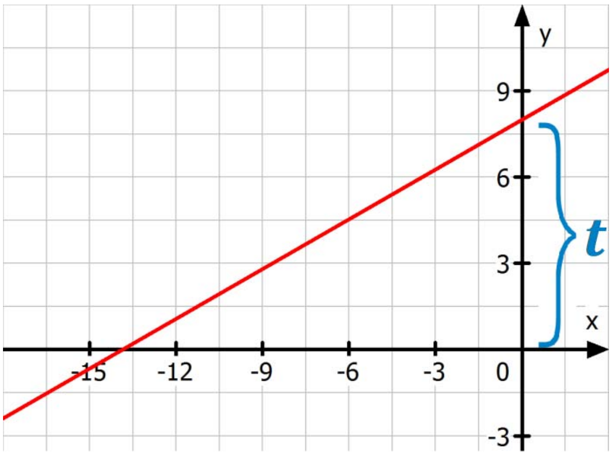
Lösung:

Es ragen noch $\mathbf{5,48}\ \boldsymbol{m}$ aus dem Boden.

Aufgabe 4

Schritt 1: Allgemeine Geradengleichung ansetzen

Die allgemeine Geradengleichung lautet: $y = \ m \cdot x + t$. Dabei ist m die Steigung der Geraden.



Die in der Skizze blau gekennzeichnete Länge ist der y-Achsenabschnitt.

Schritt 2: Steigung bestimmen

Die Steigung m einer Geraden ist immer gleich dem Tangens des Schnittwinkels mit der x-Achse.

$$m = \tan(30°) = (\frac{\sin(30°)}{\cos(30°)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ (\approx 0{,}58)$$

Schritt 3: y-Achsenabschnitt und Lösung bestimmen

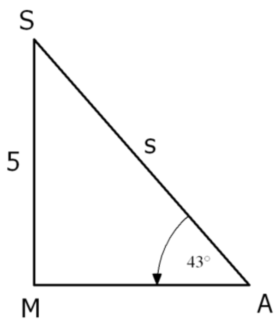
Der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse ist vorgegeben, nämlich $P(0|8)$. Der Parameter t ist daher gegeben durch $t = 8$.

Lösung

Die vollständige Geradengleichung lautet also $\boldsymbol{y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 8}$.

Aufgabe 5a)

Schritt 1: Skizze



Schritt 2: Rechnung

$$\sin(43°) = \frac{5}{s}$$

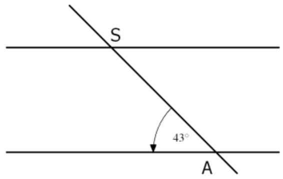
$$s = \frac{5}{\sin(43°)}$$

$$s = 7{,}33\ m$$

Schritt 3: Konstruktion

Du zeichnest zwei parallele Geraden im Abstand von 5 cm.

Dann zeichnest du eine Gerade, die die untere Gerade unter einem Winkel von 43° schneidet.



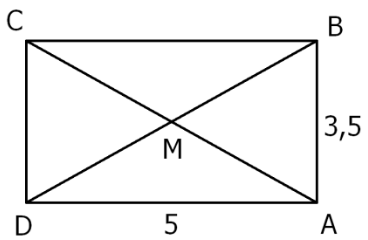
Jetzt musst du nur noch den Abstand der Punkte A und S messen.

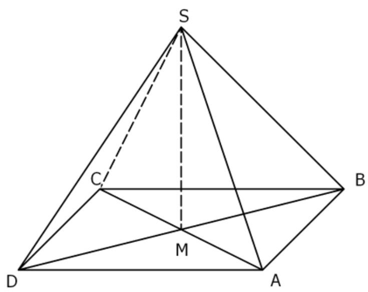
Aufgabe 5b)

Schritt 1: Vorüberlegung

Bei einer geraden Pyramide befindet sich die Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M der Diagonalen der Grundfläche. Das heißt, eine Bedingung dafür, dass es sich um eine gerade Pyramide handelt, ist, dass die Strecke $\overline{AM}$ im Dreieck MAS so lang ist, wie die Hälfte der Diagonalen $\overline{AC}$.

Schritt 2: Skizze





Schritt 3: $\overline{MA}$ im Dreieck ACD berechnen

$$\begin{aligned}\overline{MA} &= 0{,}5\overline{AC}\\ &= 0{,}5 \cdot \sqrt{5^2 + 3{,}5^2}\\ &= 3{,}05\ cm\end{aligned}$$

Schritt 4: $\overline{MA}$ im Dreieck MAS berechnen

$$\begin{aligned}\tan(43°) &= \frac{5}{\overline{MA}}\\ \overline{MA} &= \frac{5}{\tan(43°)}\\ &= 5{,}36\ cm\end{aligned}$$

Lösung:

Es handelt sich **nicht** um eine **gerade Pyramide**.

Fazit:

Ziemlich anspruchsvolle Schulaufgabe hinsichtlich der Geometrieaufgaben. Die Wahrscheinlichkeitsaufgaben bewegen sich auf einem gut lösbaren Niveau.