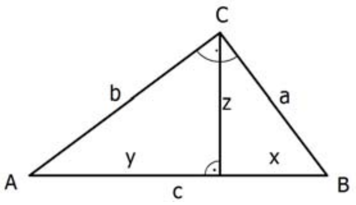
Aufgabe 1



Schritt 1: Höhe des Dreiecks berechnen

Die Höhe z teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Die Höhe z berechnest du mithilfe des Satz des Pythagoras (z und x sind die Katheten, a die Hypotenuse des Teildreiecks).

$$z^2 = a^2 - x^2$$
$$z = \sqrt{25 - 9}$$
$$z = 4\ cm$$

Schritt 2: y berechnen

Jetzt kannst du mit dem Höhensatz den zweiten Hypotenusenabschnitt berechnen.

$$z^2 = p \cdot q$$
$$z^2 = x \cdot y$$
$$y = \frac{z^2}{x}$$
$$y = \frac{16}{3} = 5{,}33\ cm$$

Schritt 3: c berechnen

$$c = x + y$$
$$= 3 + 5{,}33$$
$$= 8{,}33\ cm$$

Schritt 4: b berechnen

Hier kannst du den Satz des Pythagoras auf das Gesamtdreieck anwenden.

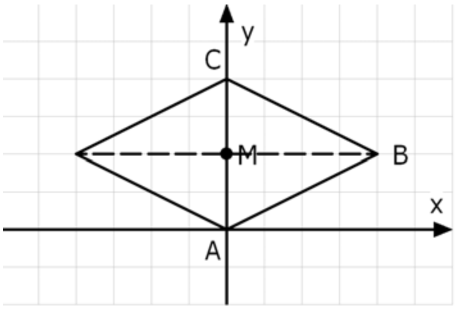
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$= \sqrt{8{,}33^2 - 5^2}$$
$$= 6{,}67\ cm$$

Lösung:

$\boldsymbol{b = 6,67\ cm; c = 8,33\ cm; y = 5,33\ cm; z = 4\ cm}$

Aufgabe 2a)

Schritt 1: Skizze und Ansatz



Der Rotationskörper hat also zwei Spitzen (oben C und unten A), besteht also aus zwei Kegeln mit der gleichen Grundfläche G. Das Gesamtvolumen ist also die Summe der zwei Kegelvolumina.

Schritt 2: Volumina der einzelnen Teilkörper berechnen

Volumen eines Kegels: $V_K = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, wobei

$G =$ Grundfläche (hier: Kreis mit Radius 2) $G = r^2 \cdot \pi$ und

$h =$ Höhe (hier: Abstand von C zu M bzw. A zu M, also 1)

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 1$$
$$= \frac{4}{3} \pi \ cm^3$$

Schritt 3: Volumen des Rotationskörpers berechnen

Du musst dieses Ergebnis nur noch mit zwei multiplizieren.

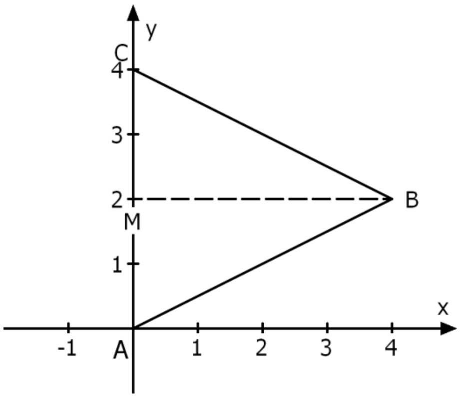
$$V = \frac{8}{3} \cdot \pi \ cm \approx 8{,}38 \ cm^3$$

Lösung:

Der Rotationskörper hat ein Volumen von ca. $\mathbf{8,38\ cm^3}$.

Aufgabe 2b)

Schritt 1: Skizze



Schritt 2: Veränderung der relevanten Größen festhalten

Wie aus der Skizze ersichtlich, haben sich durch die Verdoppelung der Koordinaten der Punkte A, B und C der Radius und die Höhe des Rotationskörpers verdoppelt.

Schritt 3: Veränderungen in die Volumenformel einsetzen

$$V_{alt} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Mit $r_{neu} = 2r$ und $h_{neu} = 2h$ ergibt sich für das neue Volumen:

$$\begin{aligned} V_{neu} &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2r)^2 \cdot \pi \cdot (2h) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h \\ &= 8 \cdot V_{alt} \end{aligned}$$

Lösung:

Das **Volumen des Rotationskörpers verachtfacht** sich, wenn sich Höhe und Radius verdoppeln.

Aufgabe 3

Schritt 1: mögliche Vorgehensweise

Um das Zufallsexperiment „Zwei Würfel werden gleichzeitig geworfen“ zu simulieren, wählt man seine Zufallszahlen so aus, dass sie der von zwei Würfeln entsprechen, also jeweils eine Kombination von zwei Zahlen zwischen eins und 6. Damit man einen stabilen Schätzwert erhält, sollte das Experiment möglichst oft wiederholt werden, wir rechnen hier mit n =100 Versuche. Wenn man anschließend die Anzahl, mit der der Ausgang des Experiments *„9"* ergibt, durch n teilt, erhält man einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit.

Schritt 2: Wahrscheinlichkeit bestimmen

Wenn du zwei Würfel wirfst, so ergeben sich $6 \cdot 6$, also 36 mögliche Kombinationen. Zur besseren Übersichtlichkeit kannst du dir die Kombinationssystematik auch kurz notieren.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	<u>36</u>
41	42	43	44	<u>45</u>	46
51	52	53	<u>54</u>	55	56
61	62	<u>63</u>	64	65	66

Wen man zwei Würfel gleichzeitig wirft, gibt es 36 mögliche Kombinationen, von denen vier die Quersumme 9 ergeben. Damit liegt die relative Häufigkeit, bei einem Wurf die Augensumme 9 zu erhalten, bei $\frac{4}{36} = \mathbf{\frac{1}{9}}$**.** Das bedeutet, dass, wenn man diesen Versuch 100-mal durchführen würde, man ca.11 mal die Augensumme 9 erhält.

Aufgabe 4a)

Schritt 1: Wahrscheinlichkeiten für die drei Züge ermitteln

Wahrscheinlichkeit für „günstiges Ereignis" beim ersten Zug

Da sich in der Kiste 10 Kugeln befinden, von denen 3 mit E beschriftet sind, ist die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug ein E zu ziehen, $\frac{3}{10}$.

Wahrscheinlichkeit für „günstiges Ereignis" beim zweiten Zug

Weil Max ohne Zurücklegen zieht, befinden sich danach noch neun Kugeln in der Kiste. Die Wahrscheinlichkeit, eine von den zwei Kugeln zu ziehen, die mit I beschriftet sind, liegt bei $\frac{2}{9}$.

Wahrscheinlichkeit für „günstiges Ereignis" beim dritten Zug

Beim dritten Zug befinden sich noch acht Kugeln in der Kiste, davon ist eine mit S beschriftet. Die Wahrscheinlichkeit, diese Kugel zu ziehen, liegt bei $\frac{1}{8}$.

Schritt 2: Erste Pfadregel anwenden

Um jetzt zu bestimmen, wie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „EIS" ist, wendest du die erste Pfadregel, auch Pfadmultiplikationsregel genannt, an. Das heißt, du musst die Einzelwahrscheinlichkeiten miteinander multiplizieren.

$$P(EIS) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120}$$

Lösung:
Die Wahrscheinlichkeit, dass Max nach dreimaligem Ziehen das Wort „EIS“ vor sich liegen hat, liegt bei $\frac{1}{120}$.

Aufgabe 4 b)

Schritt 1: Wahrscheinlichkeiten für die drei Züge ermitteln

Wahrscheinlichkeit für „günstiges Ereignis“ beim ersten Zug
Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug ein E zu ziehen, liegt bei $\frac{3}{10}$. (s. Aufgabenteil a)

Wahrscheinlichkeit für „günstiges Ereignis“ beim zweiten Zug
Die Wahrscheinlichkeit, aus den neun verbleibenden Kugeln eine auszuwählen, die mit H beschriftet ist, beträgt $\frac{2}{9}$. (denn es sind ja noch zwei Kugeln mit H in der Kiste).

Wahrscheinlichkeit für „günstiges Ereignis“ beim dritten Zug
Beim dritten Zug befinden sich noch acht Kugeln in der Kiste, von den drei ursprünglich mit E beschrifteten sind noch zwei übrig. Die Wahrscheinlichkeit, eine der beiden zu ziehen, liegt bei $\frac{2}{8}$,also $\frac{1}{4}$.

Schritt 2: Erste Pfadregel anwenden
Du multiplizierst wieder die Einzelwahrscheinlichkeiten, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass Max das Wort „EHE“ vor sich liegen hat.

$$P(EHE) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{360} = \frac{1}{60}$$

Lösung:
Die Wahrscheinlichkeit, dass Max nach dreimaligem Ziehen das Wort „EHE“ vor sich liegen hat, liegt bei $\frac{1}{60}$.

Aufgabe 4c)

Schritt 1: Wahrscheinlichkeiten für die drei Züge ermitteln

Wahrscheinlichkeit für „günstiges Ereignis“ beim ersten Zug
Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug ein M zu ziehen, liegt bei $\frac{1}{10}$.

Wahrscheinlichkeit für „günstiges Ereignis“ beim zweiten Zug
Die Wahrscheinlichkeit, aus den neun verbleibenden Kugeln eine auszuwählen, die mit I beschriftet ist, beträgt $\frac{2}{9}$.

Wahrscheinlichkeit für „günstiges Ereignis“ beim dritten Zug

Die Wahrscheinlichkeit, das R unter den verbleibenden acht Kugeln herauszufischen, liegt bei $\frac{1}{8}$.

Schritt 2: Erste Pfadregel anwenden

$$P(MIR) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{720} = \frac{1}{360}$$

Lösung:

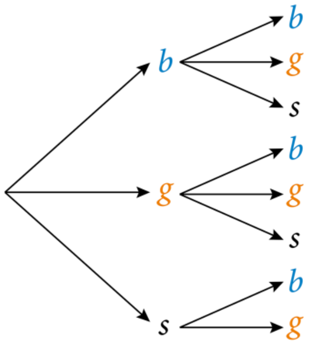
Die Wahrscheinlichkeit, dass Max nach dreimaligem Ziehen das Wort „EIS“ vor sich liegen hat, liegt bei $\frac{1}{360}$.

Aufgabe 5a)

Schritt 1: Baumdiagramm erstellen

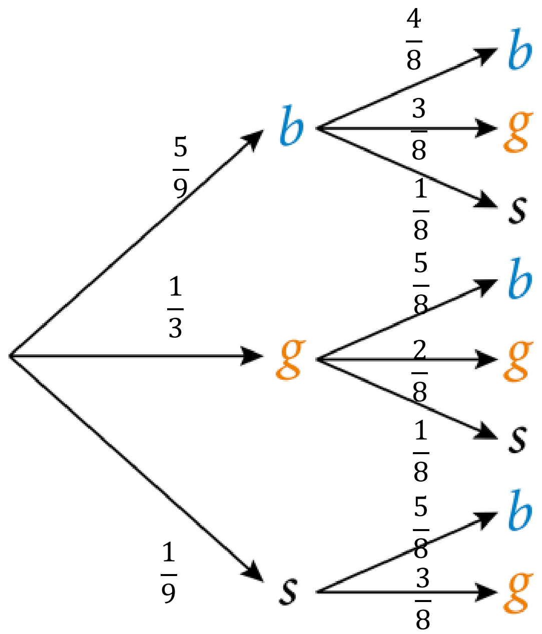
Es wird zweimal aus einer Urne gezogen, das heißt, es handelt sich hier um ein zweistufiges Zufallsexperiment. Beim ersten Zug gibt es drei mögliche Ausgänge, nämlich blau (b), gelb (g) und schwarz (s). Achte darauf, dass man nach dem ersten Zug die gezogene Kugel nicht wieder zurücklegt, das heißt, je nachdem, was beim ersten Zug gezogen wurde, ändern sich die Wahrscheinlichkeiten für den zweiten Zug.

Für jeden dieser drei Ausgänge musst du dir überlegen, welche möglichen Ausgänge der zweite Zug haben kann. Ist die erste gezogene Kugel blau, oder gelb, so können beim nächsten Zug noch alle drei Farben gezogen werden. Wird aber beim ersten Zug eine schwarze Kugel gezogen, so bleiben nur noch blaue und gelbe Kugeln in der Urne zurück.



Schritt 2: Baumdiagramm beschriften

Da ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm verlangt wird, musst du alle Wahrscheinlichkeiten berechnen.



Schritt 3: Erste Pfadregel anwenden

Da du die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen sollst, dass Karl eine blaue und eine gelbe Kugel vor sich liegen hat, betrachtest du nur die Pfade (blau – gelb) und (gelb – blau) . Mithilfe der ersten Pfadregel berechnest du die Wahrscheinlichkeiten am Pfadende:

$P\ (\{b, g\}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$ Die Wahrscheinlichkeit, erst eine blaue, dann eine gelbe Kugel zu ziehen, beträgt $\frac{5}{24}$

$P\ (\{g, b\}) = \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$ Die Wahrscheinlichkeit, erst eine gelbe, dann eine blaue Kugel zu ziehen, beträgt $\frac{5}{24}$.

Schritt 4: Zweite Pfadregel anwenden

Nach der zweiten Pfadregel addierten sich die Wahrscheinlichkeiten der Pfade (blau – gelb) und (gelb –blau) zur Wahrscheinlichkeit „eine blaue und eine gelbe Kugel“.

$$\text{P(eine blaue und eine gelbe Kugel)} = \frac{5}{24} + \frac{5}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

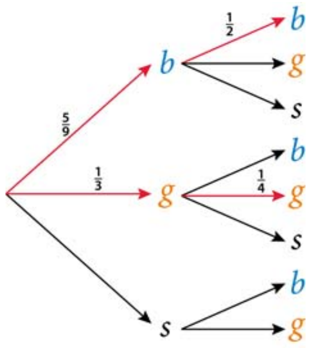
Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass Karl nach zweimaligem Ziehen aus der Urne eine blaue und eine gelbe Kugel vor sich liegen hat, beträgt $\mathbf{\frac{5}{12}}$.

Aufgabe 5 b)

Schritt 1: Pfade im Baumdiagramm bestimmen

Für diesen Aufgabenteil, in dem es nur um die Wahrscheinlichkeit „zwei Kugeln der gleichen Farbe werden gezogen“ geht, brauchst du dir nur die Wahrscheinlichkeiten der roten Pfade anzuschauen.



Schritt 2: Erste Pfadregel anwenden

$P(b,b) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$ Die Wahrscheinlichkeit, zwei blaue Kugeln zu ziehen, beträgt $\frac{5}{18}$.

$P(g,g) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ Die Wahrscheinlichkeit, zwei gelbe Kugeln zu ziehen, beträgt $\frac{1}{12}$.

Schritt 3: Zweite Pfadregel anwenden

$$P(zwei\ Kugeln\ gleicher\ Farbe\ werden\ gezogen) = \frac{5}{18} + \frac{1}{12} = \frac{13}{36}$$

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben, beträgt $\boldsymbol{\frac{13}{36}}$.

Aufgabe 5c)

Schritt 1: Erste und zweite Pfadregel anwenden

Um zu überprüfen, ob die Behauptung stimmt, addierst du die Wahrscheinlichkeiten von P(schwarze Kugel beim ersten Zug) und P(schwarze Kugel beim zweiten Zug).

Die Wahrscheinlichkeit, dass Karl beim ersten Zug eine schwarze Kugel zieht, beträgt $\frac{1}{9}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie beim zweiten Zug gezogen wird, beträgt $\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{72} + \frac{1}{24} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$.

→ $P\ (eine\ schwarze\ Kugel\ wird\ gezogen) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$.

Lösung:

Die Behauptung stimmt. Man kann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine schwarze Kugel gezogen wird, mithilfe des Terms $\frac{1}{9} + \frac{1}{9}$ berechnen.

Fazit:

Gut lösbare Schulaufgabe auf angemessenem Niveau. Bei der Aufgabe zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers benötigt man ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen.