Aufgabe 1a)

Schritt 1: Oberflächenformel aufstellen

Gesucht ist die Oberfläche des Prismas. Das heißt, $A = 2 \cdot G + M$, mit G als Grundfläche und M als Mantel.

Die Oberfläche der Verpackung besteht aus sechs Teilen: 2 Trapeze (vorne und hinten), und 4 Rechtecke.

→ $A = 2 \cdot T + 2 \cdot R + 4\ cm \cdot 30\ cm + 2cm \cdot 30\ cm$

Schritt 2: Grundfläche und Seitenfläche berechnen

Berechnung der Grundfläche (Trapez)

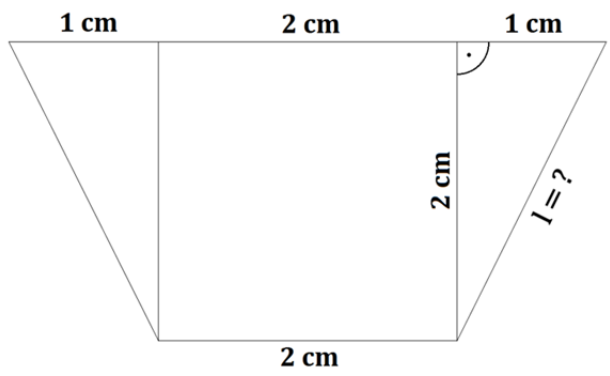
Die Grundfläche wird von einem Trapez gebildet.
Die Formel für den Flächeninhalt von Trapezen lautet:

$T = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$ (wobei a und c die beiden parallelen Seiten sind)

$$T = \frac{1}{2}(2\ cm + 4\ cm) \cdot 2\ cm = 6\ cm^2$$

Berechnung der Seitenflächen

Das Rechteck R hat die Seitenlänge 30 cm, die Breite muss noch berechnet werden. Die Breite des Rechtecks ist zugleich die Länge l der schrägen Seitenkante des Trapezes. Das kannst du mithilfe des Satz des Pythagoras berechnen.



$$(2\text{ cm})^2 + (1\text{ cm})^2 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{(2\text{ cm})^2 + (1\text{ cm})^2} = \sqrt{5}\text{ cm}$$

$$\Rightarrow R = 30\text{ cm} \cdot \sqrt{5}\text{ cm} = 30\sqrt{5}\text{ cm}^2$$

Schritt 3: Teilflächen zusammenzählen

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot\ T + 2 \cdot\ R + 4\text{ cm} \cdot\ 30\text{ cm} + 2\text{ cm} \cdot\ 30\text{ cm} \\ &= 2 \cdot\ 6\text{ cm}^2 + 2 \cdot\ 30\sqrt{5}\text{ cm}^2 + 4\text{ cm} \cdot\ 30\text{ cm} + 2\text{ cm} \cdot\ 30\text{ cm} \\ &\approx \mathbf{326,2\ cm^2} \end{aligned}$$

Lösung
Man benötigt etwa **326,2 $\boldsymbol{cm^2}$ Karton** zur Herstellung der Verpackung.

Aufgabe 1b)

Schritt 1: Volumen berechnen
Die Berechnung des Volumens ist nicht weiter kompliziert. Du berechnest das Volumen des Zylinders mit dem äußeren Radius und subtrahierst „das Loch“, den Zylinder mit dem inneren Radius.

$$
\begin{aligned}
V &= {r_2}^2 \cdot \pi \cdot h - {r_1}^2 \cdot \pi \cdot h \\
V &= ({r_2}^2 - {r_1}^2) \cdot \pi \cdot h \\
&= (100 - 36) \cdot \pi \cdot 2{,}5 \\
&= 160\pi \approx \mathbf{502{,}65\ cm^3}
\end{aligned}
$$

Schritt 2: Oberfläche berechnen
Die Oberfläche besteht aus Grund- und Deckfläche, das sind zwei kongruente Kreisringe, der äußeren Seitenfläche (A_1) und der inneren Seitenfläche (A_2).

Grund- und Deckfläche berechnen:
Ähnlich wie bei dem Volumen ziehst du den inneren Kreis vom äußeren ab:

$$
\begin{aligned}
A_G &= {r_2}^2 \cdot \pi - {r_1}^2 \cdot \pi \\
&= ({r_2}^2 - {r_1}^2) \cdot \pi \\
&= 64 \cdot \pi \\
&\approx 201{,}06\ cm^2
\end{aligned}
$$

Äußere Seitenfläche berechnen
Die äußere Seitenfläche wird von einem Rechteck mit dem Umfang des äußeren Kreises als Grundseite und der Höhe des Körpers als Höhe gebildet.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 2 \cdot r_2 \cdot \pi \cdot h \\
&= 2 \cdot 10 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \\
&= 50\pi \\
&\approx 157.08\ cm^2
\end{aligned}
$$

Innere Seitenfläche berechnen
Analog verfährst du mit der inneren Seitenfläche:

$$
\begin{aligned}
A_2 &= 2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot h \\
&= 2 \cdot 6 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \\
&= 30\pi \\
&\approx 94{,}25\ cm^2
\end{aligned}
$$

Gesamtoberfläche berechnen
Für die Oberfläche gilt also:

$$A_O = 2 \cdot A_G + A_1 + A_2$$

$= (2 \cdot 64 + 50 + 30) \cdot \pi$
$= 208\pi$
$\approx \mathbf{653{,}45\ cm^2}$

Aufgabe 2

Schritt 1: -12 in alle möglichen Faktoren zerlegen

Vorüberlegung

Bei der Berechnung mithilfe des Satz von Vieta nutzt du die folgenden Beziehungen:

$-p = x_1 + x_2$

$q = x_1 \cdot x_2$

Zerlegung

In unserem Fall $x^2 - x - 12 = 0$ ist p = -1 und q = -12

$$-12 = \begin{array}{l} (-1) \cdot 12 \\ (-2) \cdot 6 \\ (-3) \cdot 4 \\ (-4) \cdot 3 \\ (-6) \cdot 2 \\ (-12) \cdot 1 \end{array}$$

Schritt 2: Das Faktorenpaar suchen, das addiert 1ergibt

$(-3) + 4 = 1$

Schritt 3: Lösung angeben

$\boldsymbol{x_1 = -3}$
$\boldsymbol{x_2 = 4}$

Aufgabe 3

Schritt 1: Lösungsstrategie überlegen

Im rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
Nimm an, die Seite a sei die kürzeste Seite.
Dann gilt für die Seite b: $b = a + 5$ und c: $c = b + 5 = a + 10$.

Schritt 2: Gleichung aufstellen und lösen

$a^2 + (a+5)^2 = (a+10)^2$ |ausmultiplizieren und zusammenfassen
$2a^2 + 10a + 25 = a^2 + 20a + 100$ $| - a^2 - 20a - 100$
$a^2 - 10a - 75 = 0$ |Satz von Vieta

1. $a_1 + a_2 = -p$
2. $a_1 \cdot a_2 = q$

$$a_1 = -5$$
$$a_2 = 15$$

Schritt 3: Flächeninhalt berechnen

Du weißt jetzt, dass die kürzeste Seite 15 cm lang ist. (Die negative Lösung kommt ja nicht für die Seitenlänge eines Dreiecks in Frage.)
Damit ist die Seite $b = 20\ cm$ und die Seite $c = 25\ cm$ lang und für den Flächeninhalt gilt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \\ &= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 \\ &= 150\ cm^2 \end{aligned}$$

Lösung:

$\boldsymbol{A = \ 150\ cm^2}$

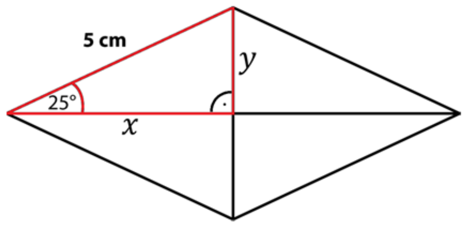
Aufgabe 4

Schritt 1: Seitenlänge eines Dreiecks berechnen

Ansatz

Eine Raute ist aus vier kongruenten, rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt.

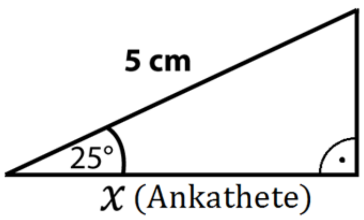
Die Diagonale der Raute ist doppelt so lang wie die Seitenlängen x und y des roten Dreiecks in der Skizze.



Berechnung der Ankathete

Die untere Seite des roten Dreiecks ist die Ankathete des angegebenen Winkels. Um die Seitenlänge zu berechnen brauchst du die trigonometrische Formel

$\cos = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$, wobei die Hypotenuse mit 5 cm gegeben ist.



$$\cos(25°) = \frac{x}{5\ cm}$$
$$x = \cos(25°) \cdot 5\ cm \approx 4{,}53\ cm$$

Berechnung der Gegenkathete

Die Seite y ist die Gegenkathete zum angegebenen Winkel. Du berechnest sie mit der Formel:

$$\sin = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(25°) = \frac{y}{5\ cm}$$

$$y = \sin(25°) \cdot\ 5\ cm\ \approx 2{,}11\ cm$$

Schritt2: Diagonalen bestimmen

Um die Diagonalen zu berechnen, musst du die eben ausgerechneten Seitenlängen verdoppeln.

Waagrechte Diagonale $d_1 = 2 \cdot x \approx \mathbf{9,06\ cm}$

Senkrechte Diagonale $d_2 = 2 \cdot y\ \approx \mathbf{4,2\ cm}$

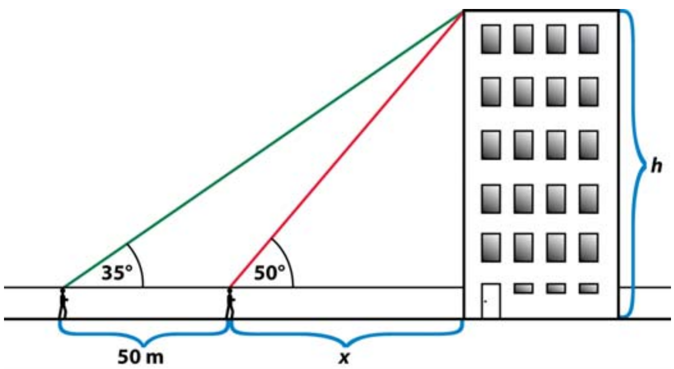
Aufgabe 5

1. Schritt: Bezeichnungen festlegen

Höhe des Hochhauses: h

Höhe der zwei rechtwinkligen Dreiecke: $h' = h - 2\ \mathrm{m}$

Skizze:



2. Schritt: Gleichungssystem aufstellen

Im größeren der beiden rechtwinkligen Dreiecke hat der Öffnungswinkel 35 ° als Gegenkathete h' und als Ankathete $50\ \mathrm{m} + x$. Du berechnest mithilfe der trigonometrischen Formeln:

$$\mathrm{I:}\ \tan(35\ °) = \frac{h'}{50\ \mathrm{m} + x}.$$

Im kleineren Dreieck hat der Öffnungswinkel 50 ° als Gegenkathete ebenfalls h' aber als Ankathete x. Also gilt

$$\mathrm{II:}\ \tan(50\ °) = \frac{h'}{x}.$$

3. Schritt: Gleichungssystem lösen

Aus II folgt

$$x = \frac{h'}{\tan(50\,°)}.$$

Einsetzen in I liefert

$$\tan(35\,°) = \frac{h'}{50\text{ m} + \frac{h'}{\tan(50\,°)}} = \frac{\tan(50\,°)\,h'}{\tan(50\,°)\,50\text{ m} + h'}$$

$$\Longrightarrow \tan(35\,°)\,(\tan(50\,°)\,50\text{ m} + h') = \tan(50\,°)\,h'$$

$$\Longrightarrow \tan(35\,°)\tan(50\,°)\,50\text{ m} + \tan(35\,°)\,h' = \tan(50\,°)\,h'.$$

Zusammenfassen und h' ausklammern:

$$h' \cdot (\tan(50\,°) - \tan(35\,°)) = \tan(35\,°)\tan(50\,°)\,50\text{ m}.$$

$$\Longrightarrow h' = \frac{\tan(35\,°)\tan(50\,°)\,50\text{ m}}{\tan(50\,°) - \tan(35\,°)} \approx 84{,}88\text{ m}.$$

Lösung

Gesamthöhe des Hochhauses: $h = h' + 2\text{ m} \approx \mathbf{86{,}88\ m.}$

Fazit:

Schulaufgabe mit dem Themenschwerpunkt Trigonometrie. Bis auf die letzte Aufgabe, deren Anforderungsniveau recht hoch ist, sind aber alle Aufgaben relativ gut und einfach zu lösen.