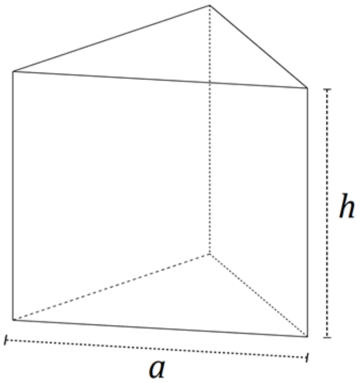
Aufgabe 1

Schritt 1: Skizze anfertigen

Um dir besser vorstellen zu können, wie der Getränkekarton aussehen soll und wie die Abmessungen zusammenhängen, solltest du dir als allererstes eine saubere Skizze machen:



Gegeben sind das Volumen und die Höhe h des Prismas. Gesucht ist die Seitenlänge a der Grundfläche.

Schritt 2: Volumenformel für das Prisma anwenden

Die Volumenformel für ein Prisma lautet:

$V = G \cdot h$, wobei G die Grundfläche des Prismas ist.

→ $V = 1{,}5l \mathrel{\widehat{=}} 1500cm^3$ und $h = 5\sqrt{3}cm$ sind gegeben

$5\sqrt{3} \cdot G = 1500$ |Formel nach G umstellen:

$G = \frac{V}{h}$ |Werte einsetzen

$G = \frac{1{,}5\ l}{5\sqrt{3}\ cm}$ |Liter in dm^3 umrechnen

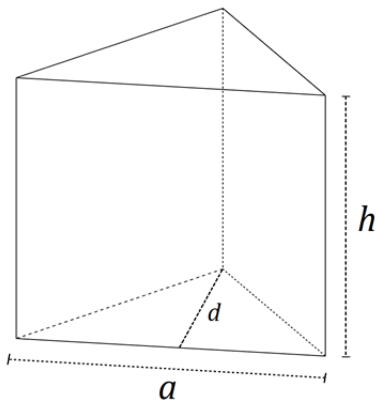
$G = \frac{1{,}5\ dm^3}{0{,}5\ \sqrt{3}\ dm}$ |kürzen

$G = \sqrt{3}\ dm^2$

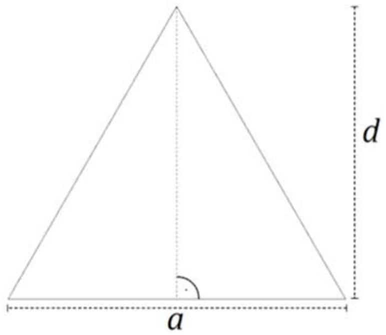
Gesucht ist jetzt die Seitenlänge a, mit der die Gleichung $G = \sqrt{3}dm^2$ gilt.

Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks:

Dreiecksfläche = $\frac{1}{2} \cdot Grundseite \cdot Dreieckshöhe$ (hier d) → d muss noch bestimmt werden



Schritt 3: Zusammenhang zwischen a und d ermitteln



Die Höhe teilt das Dreieck genau in zwei rechtwinklige Dreiecke, die rechte Hälfte hat die Seitenlängen a, d, und $\frac{a}{2}$. Wir können den Satz des Pythagoras anwenden.

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2 = a^2 \rightarrow d = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$

$\rightarrow G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$

Schritt 4: Seitenlänge a berechnen

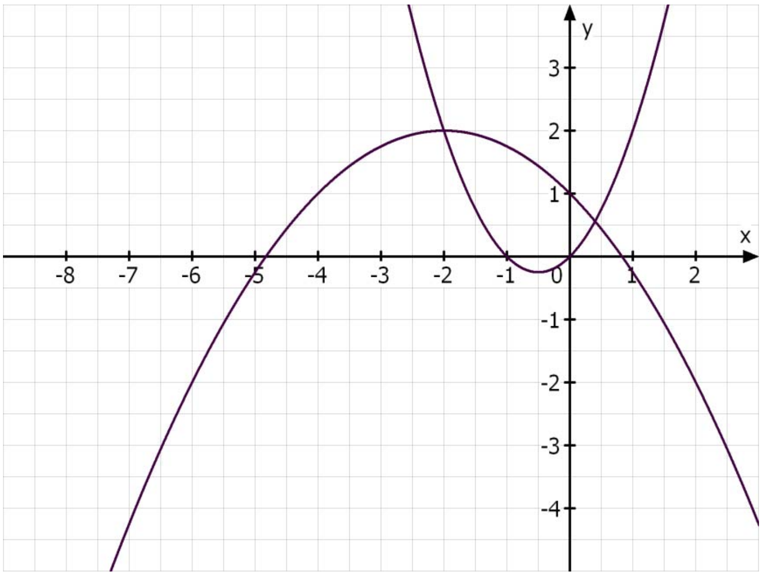
$G = \sqrt{3}\ dm^2$ (s. Schritt 2) und $G = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$ (s. Schritt 3)

$\rightarrow \sqrt{3}dm^2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 \Leftrightarrow a^2 = 4\ dm^2 \Leftrightarrow a = 2\ dm$

Lösung:

Die Seitenlänge der Grundfläche des Kartons beträgt **2 dm.**

Aufgabe 2



Schritt 1: Scheitelpunkt bestimmen

Der Graph zu $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 2$ ist bereits im Koordinatensystem eingezeichnet. Um den Schnittpunkt der beiden Graphen abzulesen, musst du auch die zweite Parabel mit der Funktionsgleichung $x^2 + x$ in das Koordinatensystem eintragen. Dazu berechnest du den Scheitelpunkt der Parabel, indem du die Funktionsgleichung im ersten Schritt in die Scheitelpunktform bringst.

$y = x^2 + x + 0{,}5^2 - 0{,}5^2$ |quadratische Ergänzung

$y = (x + 0{,}5)^2 - 0{,}25 \rightarrow S(-0{,}5| - 0{,}25)$

Schritt 2: Parabel einzeichnen (Schablone)

Schritt 3: x-Werte der Schnittpunkte ablesen

$\boldsymbol{x_1 = -2}$

$\boldsymbol{x_2 = 0{,}4}$

Schritt 4: Überprüfung durch Rechnung

Deine Werte kannst du rechnerisch überprüfen, indem du die beiden Funktionsterme gleichsetzt und die Gleichung so lange umformst, bis du die bereinigte Normalform einer quadratischen Funktion erhältst. $(x^2 + px + q)$. Danach kannst du mithilfe der Lösungsformel die beiden x-Werte berechnen.

Gleichungen in die Normalform bringen

$$-0{,}25(x + 2)^2 + 2 = x^2 + x$$

$$
\begin{aligned}
-0{,}25(x^2+4x+4)+2 &= x^2+x \\
-0{,}25x^2-x+1 &= x^2+x && |-x^2-x \\
-1{,}25x^2-2x+1 &= 0 && |:(-1{,}25) \\
x^2+1{,}6x-0{,}8 &= 0
\end{aligned}
$$

Normalform der quadratischen Gleichung liegt vor.

Lösungsformel anwenden

$$
\begin{aligned}
x_{1;2} &= -0{,}8 \pm \sqrt{(-0{,}8)^2+0{,}8} \\
x_{1;2} &= -0{,}8 \pm 1{,}2 \\
x_1 &= -2 \\
x_2 &= 0{,}4
\end{aligned}
$$

Lösung:

$\boldsymbol{x_1 = -2}$

$\boldsymbol{x_2 = 0{,}4}$

Aufgabe 3a)

Schritt 1: Geeignete Formel finden und gegebene Größen notieren

Die Formel für das Volumen eines Kreiskegels lautet:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, wobei G die kreisförmige Grundfläche ist.

Gegeben: $r = 12\ cm, \quad h = 14\ cm$

Schritt 2: Größen einsetzen und Volumen berechnen

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot \pi \cdot 14$$

$$V = 672\pi \approx 2111{,}15\ cm^3$$

Schritt 3: Umrechnen in Liter

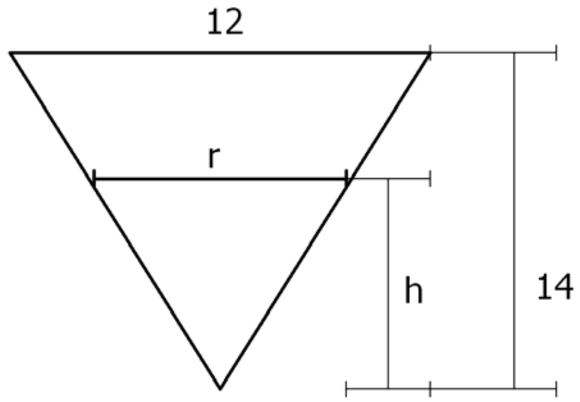
$2111{,}15\ cm^3 \mathrel{\widehat{=}} 2{,}11\ l$

Lösung:

Das Gefäß fasst circa **2,11 l Flüssigkeit**.

Aufgabe 3b)

Schritt 1: Skizze



Schritt 2: Gegebene und gesuchte Größen notieren

Gegeben: $V = 0{,}5\ l \triangleq 500\ cm^3$

Gesucht: h

$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

Schritt 3: r eliminieren

Bis jetzt hast du noch zwei Unbekannte in der Formel, nämlich r und h. Du musst also eine Möglichkeit finden, r in Abhängigkeit von h auszudrücken.

Wie die Skizze zeigt, sind die beiden Dreiecke ähnlich, das heißt, du kannst den Strahlensatz anwenden. Es gilt:

$$\frac{r}{h} = \frac{12}{14} \Rightarrow r = \frac{6}{7} \cdot h$$

Schritt 4: h berechnen

$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{7}h\right)^2 \cdot \pi \cdot h$ |vereinfachen

$V = \frac{12}{49} \cdot \pi \cdot h^3$ |Wert für V einsetzen

$\frac{12}{49} \cdot \pi \cdot h^3 = 500$ $| \cdot \frac{49}{12\pi}$

$h^3 = \frac{24500}{12\pi}$ |3. Wurzel ziehen

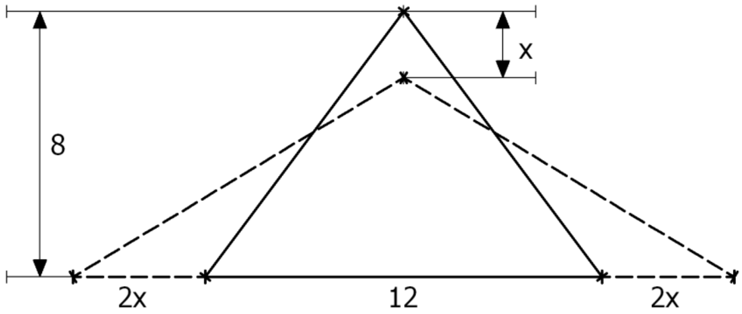
$h = \sqrt[3]{\frac{24500}{12\pi}} \approx 8{,}66\ cm$

Lösung:

Ein **halber Liter Flüssigkeit** füllt dieses Gefäß bis zu einer **Höhe von 8,66 cm.**

Aufgabe 4

Schritt 1: Skizze



Schritt 2: Gleichung für den Flächeninhalt aufstellen

Du gehst aus von der normalen Flächeninhaltsformel für ein Dreieck $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

Die Grundseite g (ursprünglich 12 cm) wird an beiden Seiten um 2x verlängert.

$g = 12 + 4x$

Die Höhe h (ursprünglich 8 cm) wird um x Einheiten verkürzt. Das bedeutet für die neue Höhe:

$h = 8 - x$.

g und h in die Flächeninhaltsformel eingesetzt ergibt:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (12 + 4x) \cdot (8 - x)$$

Ausmultiplizieren und zusammenfassen:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (96 - 12x + 32x - 4x^2)$$

$$\boldsymbol{A(x) = -2x^2 + 10x + 48}$$

Aufgabe 4b)

Schritt 1: Begründung

Die Formel für den Flächeninhalt beschreibt eine quadratische Funktion. A(x) ist demnach eine nach unten geöffnete Parabel. Der Scheitelpunkt dieser Parabel ist der höchste Punkt, es gibt also einen maximalen Flächeninhalt.

Schritt 2: Scheitelpunkt bestimmen

$$\begin{aligned} A(x) &= -2x^2 + 10x + 48 \\ &= -2(x^2 - 5x - 24) \\ &= -2(x^2 - 5x + 2{,}5^2 - 2{,}5^2 - 24) \\ &= -2[(x - 2{,}5)^2 - 30{,}25] \\ &= -2(x - 2{,}5)^2 + 60{,}5 \end{aligned}$$

Für $x = 2{,}5$ wird der Flächeninhalt mit $60{,}5\ cm^2$ maximal.

Schritt 3: Basislänge und Höhe berechnen

Für die Basis gilt: $g = 12 + 4x$, mit 2,5 für x ergibt sich eine Basislänge von 22 cm.
Die Höhe ist $8 - x$, $h = 5{,}5\ cm$.

Lösung:

Für $\boldsymbol{x = 2,5}$ wird der Flächeninhalt mit $\boldsymbol{60,5\ cm^2}$ **maximal**.

Die **Basislänge** des **zugehörigen Dreiecks** ist $\boldsymbol{22\ cm}$ lang, die Höhe ist $\boldsymbol{5,5\ cm}$ lang.

Aufgabe 5a)

Schritt 1: Lösungsansatz

Exakte Lösung heißt, du darfst eventuell vorkommende Wurzeln nicht als Dezimalzahl schreiben, weil du dann runden müsstest. Du formst die Gleichung zunächst nach null um und berechnest x_1 und x_2 mit Hilfe der Mitternachtsformel.

Gleichung nach null auflösen

$$0{,}5x^2 - 49 = 7x \qquad |-7x$$
$$0{,}5x^2 - 7x - 49 = 0 \qquad |\cdot 2$$

Mitternachtsformel anwenden

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_{1;2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-49)}}{2 \cdot 0{,}5}$$

(Teilweise radizieren)

$$x_{1;2} = 7 \pm \sqrt{49 + 98}$$
$$x_{1;2} = 7 \pm \sqrt{147}$$
$$x_{1;2} = 7 \pm \sqrt{49 \cdot 3}$$
$$x_{1;2} = 7 \pm 7\sqrt{3}$$
$$x_{1;2} = 7\left(1 \pm \sqrt{3}\right)$$

Lösung:

$$\boldsymbol{x_1 = 7(1 + \sqrt{3})}$$

$$\boldsymbol{x_2 = 7(1 - \sqrt{3})}$$

Aufgabe 5b)

Schritt 1: Term aufstellen und berechnen

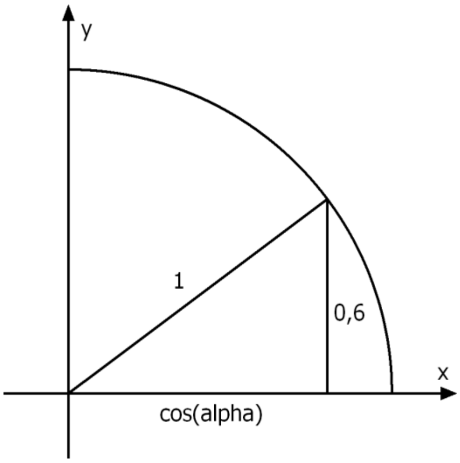
$7(1+\sqrt{3})\cdot 7(1-\sqrt{3})$
$= 49(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})$ (3. binomische Formel anwenden)
$= 49(1-3)$
$= -98$

Lösung:

$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = 7(1+\sqrt{3})\cdot 7(1-\sqrt{3}) = -98}$

Aufgabe 6

Schritt 1: Skizze



Schritt 2: Berechnung von cos(α)

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} 0{,}6^2 + cos^2(\alpha) &= 1 \\ \cos(\alpha) &= \sqrt{1-0{,}36} \\ &= \sqrt{0{,}64} \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Schritt 3: Berechnung von tan(α)

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\ &= \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \end{aligned}$$

Lösung:

$\mathbf{\cos(\alpha) = 0,8}$ $\mathbf{\tan(\alpha) = 0,75}$

Fazit:

Gut gemischte Schulaufgabe. Viele teils schwierigere Aufgaben zur Anwendung an Figuren und Körpern aber auch einfache Abfrage von Kenntnissen über Parabeln.