Aufgabe 1

Schritt 1: Koordinaten der Scheitelpunkte

Die Funktionsgleichungen sind schon in der Scheitelform $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ angegeben. Du musst die Scheitelpunkte eigentlich nur noch ablesen.

a) $S(-0{,}75; -3)$

b) $S(-3; 1{,}5)$

c) $S(a; 0)$ (Die Terme $(\mathrm{a} - \mathrm{x})^2$ und $(\mathrm{x} - \mathrm{a})^2$sind äquivalent.)

Schritt 2: Lage skizzieren

a)Der Vorfaktor a ist negativ (-1) → die Parabel ist nach unten geöffnet; der y-Wert des Scheitelpunktes ist ebenfalls negativ → Parabel liegt komplett unterhalb der x-Achse. (Es gibt keine Nullstellen.)

b) Parabel ist nach oben geöffnet; der y-Wert des Scheitelpunktes ist positiv → die Parabel liegt komplett oberhalb der x-Achse. Auch hier gibt es keine Nullstellen.

c) Die Parabel ist nach oben geöffnet, der Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse und ist somit auch die einzige Nullstelle.

Aufgabe 2a)

Schritt 1: quadratische Ergänzung

Du wandelst durch quadratische Ergänzung die allgemeine Form der Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform um:

Den Faktor vor dem x^2 ausklammern

$$\boldsymbol{y = -0{,}5(x^2 - 4x + 1{,}5)}$$

Zu einer binomischen Formel ergänzen

$y = -0{,}5(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 1{,}5)$

Den Wert, den du addieren und gleich wieder subtrahieren musst, findest du, indem du den Faktor vor dem x halbierst und quadrierst.

Term $\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 4$ als Produkt schreiben und den Rest zusammenfassen

$y = -0{,}5[(x - 2)^2 - 2{,}5]$

Ausklammern wieder rückgängig machen

$y = -0{,}5(x - 2)^2 + 1{,}25$

Jetzt steht die Funktion in der Scheitelpunktform und du kannst den Scheitelpunkt einfach ablesen.

Schritt 2: Koordinaten des Scheitelpunktes ablesen

Die Parabel hat ihren Scheitelpunkt beim Punkt (2|1,25)

Lösung:

$\boldsymbol{S(2|1,25)}$

Aufgabe 2b)

Schritt 1: Funktionsgleichung aufstellen

Mithilfe des Scheitelpunktes $\left(\frac{3}{4}\middle| -2\right)$ kannst du die Funktionsgleichung angeben:

$$y = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - 2$$

Schritt 2: Nullstellen berechnen

Zur Berechnung der Nullstellen, d.h. der Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse, setzt du den gesamten Funktionsterm gleich Null.

$$\begin{aligned}
(x-0{,}75)^2 - 2 &= 0 && |+2 \\
(x-0{,}75)^2 &= 2 && |\sqrt{} \\
|x-0{,}75| &= \sqrt{2} && |Betragsstriche\ auflösen \\
x - 0{,}75 &= \pm\sqrt{2} && |+0{,}75
\end{aligned}$$

Lösung

$$\boldsymbol{x_1 = 0,75 - \sqrt{2} \approx -0,66}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 0,75 + \sqrt{2} \approx 2,16}$$

Schritt 3: Schnittpunkt mit der y-Achse berechnen

Um den Schnittpunkt mit der y-Achse zu berechnen, setzt du in der Funktionsgleichung $x = 0$ ein.

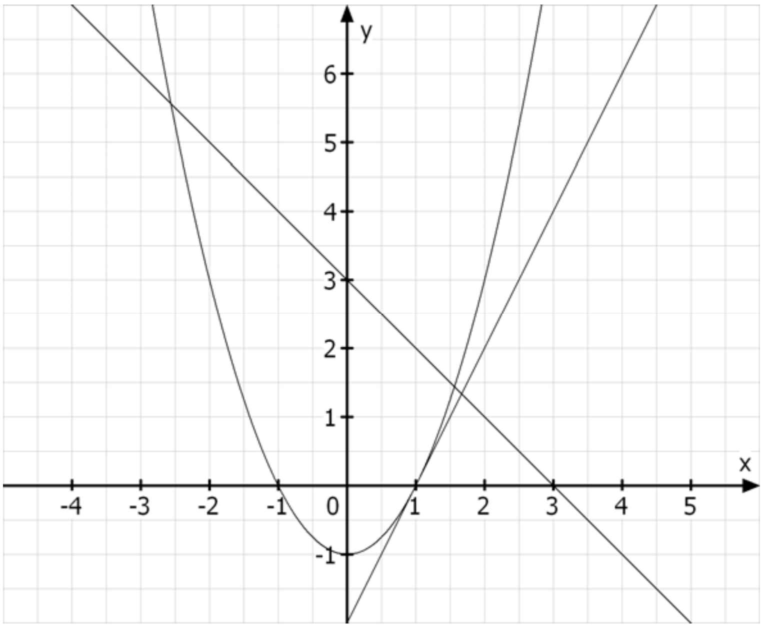
$$y = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 2$$

Lösung:

$\boldsymbol{y = -1,4375}$

Aufgabe 3

Schritt 1: Graphische Lösung



Die Gerade g schneidet die Parabel etwa in den Punkten$(-2{,}6|5{,}6)$ und $(1{,}6|1{,}4)$.

Die Gerade h berührt die Parabel im Punkt $(1|0)$.

Schritt 2: Rechnerische Lösung

Parabel und Gerade gleichsetzen

$x^2 - 1 = -x + 3$

Term umstellen

Den linken Term auf die rechte Seite bringen und mit der Mitternachtsformel oder der p-q-Formel lösen:

$x^2 + x - 4 = 0$

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2}$$

$x_1 \approx -2{,}56$

$x_2 \approx 1{,}56$

y-Werte berechnen

Dazu setzt du die x-Werte in die Geradengleichung ein.

$y_1 = -(-2{,}56) + 3 \approx 5{,}56 \quad \rightarrow \quad P_1(-2{,}56; 5{,}56)$

$y_2 \approx -1{,}56 + 3 = 1{,}44 \quad \rightarrow \quad P_2 liegt\ ungefähr\ bei\ (1{,}56; 1{,}44)$

Analog verfährst du mit der Geraden h:

$x^2 - 1 = 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

Das ist eine binomische Formel. Du brauchst hier also die Mitternachtsformel nicht unbedingt anzuwenden.

$(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = 1$

$y = 2 \cdot 1 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad P_3(1; 0)$

Lösung:

Die Gerade g schneidet die Parabel ungefähr in den Punkten $\boldsymbol{P_1(-2,56; 5,56)}$ **und** $\boldsymbol{P_2(1,56; 1,44)}$**.**

Die Gerade h schneidet die Parabel im Punkt $\boldsymbol{P_3(1; 0)}$**.**

Aufgabe 4a)

Schritt 1: Definition angeben

Die dritte Wurzel aus 27 ist die Zahl, die dreimal mit sich selbst multipliziert 27 ergibt, also 3.

Aufgabe 4b)

Schritt 1: Den Term ohne Bruchstrich schreiben

Um den Term zu vereinfachen, schreibst du ihn am besten ohne Bruchstrich. Dazu drehst du die Vorzeichen der Exponenten unter dem Bruchstrich um.

$6a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{2}{7}} \cdot 6^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{3}{12}} \cdot b^{\frac{3}{14}}$

Schritt 2: Sortieren

Jetzt nach den Basen sortieren, zunächst Zahlen und dann Buchstaben und zwar in alphabetischer Reihenfolge.

$6 \cdot 6^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{2}{7}} \cdot b^{\frac{3}{14}}$

Schritt 3: Potenzgesetze anwenden

$6^{1-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{2}{7}+\frac{3}{4}}$

Schritt 4: Exponenten zusammenfassen

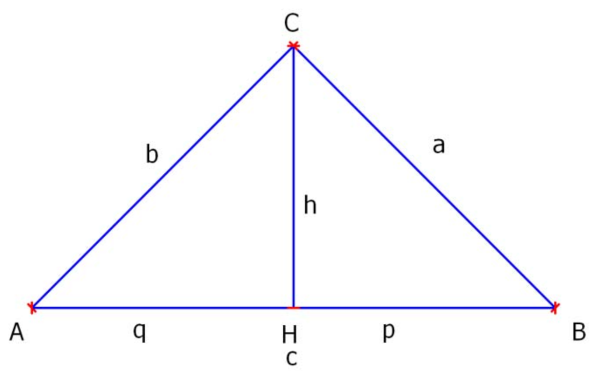
$6^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = (6ab)^{\frac{1}{2}}$ oder als Wurzel: $\sqrt[2]{6ab}$

Lösung:

$$\frac{6a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{2}{7}}}{\left(6^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{12}} \cdot b^{-\frac{3}{14}}\right)} = (\boldsymbol{6ab})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} bzw. \sqrt{\boldsymbol{6ab}}$$

Aufgabe 5a

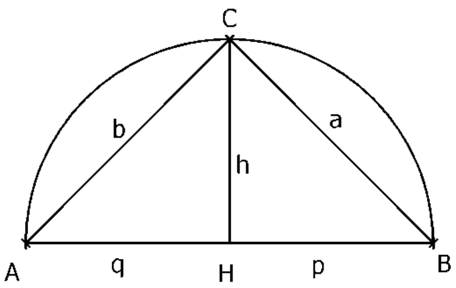
Schritt 1: Skizze



Schritt 2: Begründung mit Kongruenzsätzen:

Wir betrachten die Dreiecke AHC und HBC: Beide Dreiecke haben bei H einen rechten Winkel. Dieser Winkel wird gebildet von den Seiten q und h bzw. p und h. Da p = q gilt, sind nach dem Kongruenzsatz SWS beide Dreiecke kongruent und damit gilt: a = b.

Schritt 3: Begründung mit dem Satz des Thales



Der Punkt C liegt auf dem Thaleskreis mit dem Durchmesser [AB]. Da p = q gilt, sind die Seiten p, q und h jeweils der Radius des Kreises. Sie sind demnach gleich lang. Wegen der rechten Winkel bei H ist auch hier für die Dreiecke AHC und HBC der SWS-Satz erfüllt. Die beiden Dreiecke sind kongruent, daraus folgt: a = b.

Aufgabe 5b

Schritt 1: Bedingung aufstellen und prüfen

Wenn dieser Wunsch erfüllbar sein sollte, dann müsste für die Basis gelten:

$\sqrt{5{,}5^2 + 5{,}5^2} = 7{,}5$

$\sqrt{5{,}5^2 + 5{,}5^2} = 7{,}78 \rightarrow$ Bedingung ist nicht erfüllt.

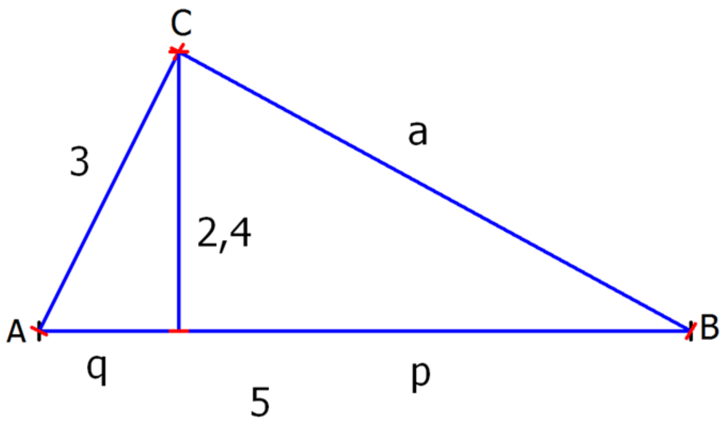
Lösung:

Der Wunsch ist nicht erfüllbar.

Aufgabe 6

Schritt 1: Skizze und Ansatz

Zunächst fertigst du eine Skizze an, in der du alle gegebenen Daten einträgst.



Um zu überprüfen, ob das Dreieck rechtwinklig ist, musst du prüfen, ob der Satz des Pythagoras gilt. Dafür musst du zunächst alle Seitenlängen des Dreiecks berechnen. Die Seite $c = 5\,cm$ ist die Hypotenuse des Dreiecks, die zugehörige Höhe h misst 2,4 cm. Die Länge einer Kathete (hier b) ist auch gegeben. Um die noch fehlende Seite a zu berechnen, nutzt du die Tatsache, dass die Höhe h das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke unterteilt. Du wendest zweimal den Satz des Pythagoras für die beiden Teildreiecke an um anschließend mithilfe des Satz des Pythagoras die Rechtwinkligkeit des Gesamtdreiecks zu prüfen.

Schritt 2: q berechnen

Das Teilstück q der Hypotenuse kannst du berechnen, indem du den Satz des Pythagoras für das erste Teildreieck anwendest. Hier bildet die Seite b = 3 cm die Hypotenuse, die Höhe ist eine Kathete. Das Teilstück kannst du somit mit der folgenden Formel berechnen:

$$b^2 = q^2 + h^2$$

$$q^2 = b^2 - h^2$$

$$q = \sqrt{(3\ cm)^2 - (2{,}4\ cm)^2}$$

$$q = 1{,}8\text{ cm}$$

Schritt 3: p berechnen

Die Länge des Teilstücks p ergibt sich aus der Gesamtlänge der Hypotenuse abzüglich q.

$$p = 5\ cm - 1{,}8\ cm = 3{,}2\ cm$$

Schritt 4: a berechnen

Jetzt kannst du die fehlende Seitenlänge a berechnen.

$$a^2 = p^2 + h^2$$

$$a = \sqrt{(3{,}2\ cm)^2 + (2{,}4\ cm)^2}$$

$$a = 4\text{ cm}$$

Schritt 5: Rechtwinkligkeit überprüfen

Wenn das Dreieck rechtwinklig ist, dann muss der Satz des Pythagoras gelten.

$3^2 + 4^2 = 5^2$

Diese Gleichung stimmt.

Lösung:

Das Dreieck **ABC** mit $\boldsymbol{c = 5cm}$, $\boldsymbol{h = 2{,}4\ cm}$ und $\boldsymbol{b = 3\ cm}$ ist **rechtwinklig.**

Fazit:

In dieser Schulaufgabe liegt der Fokus auf quadratischen Funktionen. Hier werden nochmal grundlegende Themen wie die quadratische Ergänzung und die Scheitelpunktsform abgefragt. Das muss auf jeden Fall verstanden worden sein.