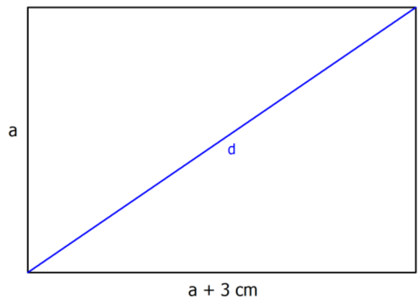
Aufgabe 1

Schritt 1: Skizze und Ansatz



Über das Rechteck weißt du, dass der Umfang 32 cm beträgt. Die Formel für den Umfang eines Rechtecks lautet $U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$.

Da du außerdem das Verhältnis der Seitenlängen kennst, (b = a + 3 cm), kannst du diese Informationen in die Formel einsetzen:

$2a + 2(a + 3) = 32$

Schritt 2: Seitenlängen berechnen

$2a + 2(a + 3) = 32$ (Klammer auflösen und zusammenfassen)

$4a + 6 = 32$ |-6

$4a = 26$ |:4

$\boldsymbol{a = 6,5\ cm}$

$b = 6,5\ cm + 3\ cm$

$\boldsymbol{b = 9,5\ cm}$

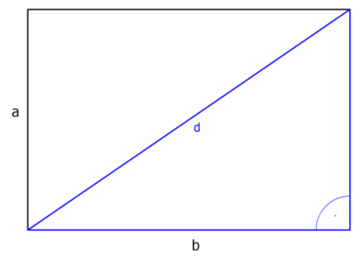
Schritt 3: Flächeninhalt berechnen

$A = a \cdot b$

$A = 6,5\ cm \cdot 9,5\ cm$

$\boldsymbol{A = 61,75\ cm^2}$

Schritt 4: Diagonale berechnen



Die Diagonale teilt das Rechteck in zwei rechtwinklige Dreiecke, wobei die Seiten a und b die Katheten sind und die zu berechnende Diagonale die Hypotenuse. Es gilt der Satz des Pythagoras:

$d^2 = a^2 + b^2$

$d^2 = (6{,}5\ cm)^2 + (9{,}5\ cm)^2$

$d = \sqrt{(132{,}5\ cm)^2}$

$\boldsymbol{d \approx 11{,}51\ cm}$

Aufgabe 2a)

Hinweis zur Aufgabenstellung

Was ist mit „radiziere durch Zerlegung in Quadratzahlen“ gemeint?

Damit ist gemeint, den Term so zu berechnen und zu zerlegen, dass unter der Wurzel nur noch Quadratzahlen stehen. Diese kannst du dann im Kopf berechnen.

Schritt 1: Zerlegung in Quadratzahlen

$\sqrt{14 \cdot 2 \cdot 847}$	(Da unter der Wurzel noch keine Quadratzahlen auftauchen, verrechnest du zunächst die „kleinen“ Zahlen 14 und 2 miteinander)
$\sqrt{28 \cdot 847}$	(28 ist das Produkt aus 7 und 4 (einer Quadratzahl))
$\sqrt{7 \cdot 4 \cdot 847}$	$\sqrt{4}$ vor die Wurzel ziehen
$\sqrt{4} \cdot \sqrt{7 \cdot 847}$	(847 durch 7 teilen, um mit den beiden 7 eine Quadratzahl zu bilden)
$\sqrt{4} \cdot \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 121}$	($\sqrt{7 \cdot 7}$ vor die Wurzel ziehen; du erhältst nur noch Quadratzahlen unter den Wurzeln)

Schritt 2: Berechnen

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{121} = 2 \cdot 7 \cdot 11 = 154$

Lösung:

154

Aufgabe 2b)

Hinweis zur Aufgabenstellung

Was ist mit „rational machen des Nenner“ gemeint?

Enthält der Nenner eine Wurzel, muss der Bruch so umgeformt werden, dass im Nenner keine Wurzel mehr auftaucht. Dies erreichst du durch Kürzen und Erweitern und durch die Anwendung der binomischen Formeln.

Schritt 1: Nenner rational machen

$\frac{16}{2+\sqrt{6}}$ (Um die Wurzel im Nenner zu beseitigen, nimmst du die dritte binomische Formel zur Hilfe und erweiterst mit $(2-\sqrt{6})$.)

$$\frac{16\cdot(2-\sqrt{6})}{(2+\sqrt{6})\cdot(2-\sqrt{6})} = \frac{32-16\cdot\sqrt{6}}{(2)^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{32-16\cdot\sqrt{6}}{4-6} = \frac{32-16\cdot\sqrt{6}}{-2}$$

Schritt 2: Kürzen

$$\frac{32-16\cdot\sqrt{6}}{-2} = \frac{16+8\cdot\sqrt{6}}{1} = 16+8\cdot\sqrt{6}$$

Lösung:

$\mathbf{16+8\cdot\sqrt{6}}$

Aufgabe 3

Hinweis zur Aufgabenstellung

Was ist eine Lösungsmenge?

Wird nach der Lösungsmenge einer Gleichung gesucht, so gilt es die Zahlen zu finden, die man für die Variablen (z. B. x) einsetzen kann, damit die Gleichung eine wahre Aussage ergibt. Dabei wird die Gleichung nach den entsprechenden Variablen aufgelöst.

Aufgabe 3 a)

Schritt 1: Diskriminante berechnen

$\frac{1}{2}x^2 - 8x + 14 = 0$ (allgemeine Form der quadratischen Gleichung: $ax^2 + bx + c$)

(Lösung mithilfe der Mitternachtsformel)

Im ersten Schritt berechnest du die Diskriminante und kannst so erkennen, wie viele Lösungen die Gleichung hat.

Diskriminante: $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

D = $(-8)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 = 36$ → $D > 0$ -→ Es gibt zwei Lösungen

Schritt 2: Lösungen mithilfe der Mitternachtsformel berechnen

Einsetzen der Diskriminante in die Mitternachtsformel:

$x_{1;2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{8 \pm 6}{1}$

$x_1 = 2$

$x_2 = 14$

Lösung:

$\mathbb{L} = \{\mathbf{2}; \mathbf{14}\}$

Schritt 1: Diskriminante berechnen

$3x^2 = -6x + 9 \qquad |+6x - 9$ (Terme auf eine Seite ziehen, damit die Gleichung null wird)

$3x^2 + 6x - 9 = 0$

Diskriminante berechnen:

$D = (6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9) = 144$ → Es gibt zwei Lösungen

Schritt 2: Lösungen mithilfe der Mitternachtsformel berechnen

Einsetzen der Diskriminante in die Mitternachtsformel:

$x_{1;2} = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 3} = \frac{-6 \pm 12}{6}$

$x_1 = -3$

$x_2 = 1$

Lösung:

$\mathbb{L} = \{\mathbf{-3}; \mathbf{1}\}$

Aufgabe 4

Hinweis zur Aufgabenstellung

Was ist mit einem „äquivalenten Term“ gemeint?

Ein äquivalenter Term ist ein Term, der im Vergleich zum Startterm zum Beispiel umgestellt, gekürzt oder erweitert wurde, jedenfalls irgendwie verändert wurde, ohne dass sich das Ergebnis ändert. Heißt, für jeden Wert von x müssen der Startterm und der äquivalente Term dasselbe Ergebnis liefern.

Schritt 1: Umwandlungsmöglichkeiten bestimmen

Startterm: $2x^2 - 1{,}6x + 2$

Der Term stellt eine quadratische Funktion in der allgemeinen Form dar.

Diese kannst du umformen in

- die bereinigte Normalform: $a \cdot \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$ (Koeffizient vor x² ausklammern)
- die Scheitelpunktform: $a(bx - c)^2 + d$ → geforderte Form

Schritt 2: Term in die bereinigte Normalform umwandeln

Bei dieser Form der quadratischen Gleichung ist der Parameter vor $x = 1$. Das heißt, du musst den gesamten Term durch2 teilen.

$2 \cdot \left(x^2 - \frac{1{,}6x}{2} + \frac{2}{2}\right) = 2 \cdot (x^2 - 0{,}8x + 1)$

Lösung I:

$\mathbf{2 \cdot (x^2 - 0{,}8x + 1)}$

Schritt 3: Term in die Scheitelpunktform umwandeln

Die Normalform kannst du mithilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktform umwandeln.

Quadratischer Einschub

$2 \cdot (x^2 - 0{,}8x + (-0{,}4)^2 - (-0{,}4)^2 + 1)$

Binomische Formel anwenden

$2 \cdot (x^2 - 0{,}8x + (-0{,}4)^2) + 2 \cdot -(-0{,}4)^2 + 2 \cdot 1 =$

$2 \cdot (x^2 - 0{,}8x + (-0{,}4)^2) - 0{,}32 + 2 =$

$2 \cdot (x^2 - 0{,}8x + (-0{,}4)^2) + 1{,}68 =$

$2 \cdot (x - 0{,}4)^2 + 1{,}68$

Lösung II:
$\mathbf{2 \cdot (x - 0,4)^2 + 1,68}$

Aufgabe 5

Hinweise zur Aufgabenstellung

Was ist mit „vereinfache“ gemeint?
Damit ist gemeint, einen Term so weit zu kürzen, bis man nichts mehr miteinander verrechnen kann, ohne lange Dezimalzahlen zu erhalten. Dabei musst du die Rechengesetze beachten.

Was ist mit „radizieren“ gemeint?
Das Radizieren ist die Umkehrung des Potenzierens. Man nennt es auch „Wurzel ziehen“. Dabei gilt es die Wurzelgesetze zu beachten.

Aufgabe 5a)

Schritt 1: Rechenregeln für Wurzeln anwenden
$9 \cdot \left(\sqrt{\frac{32}{8}} : \sqrt{\frac{72}{10}}\right)$ (Regel zur Division von Wurzeln anwenden)

$9 \cdot \left(\sqrt{\frac{32}{8}} : \sqrt{\frac{72}{10}}\right) = 9 \cdot \left(\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} : \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{10}}\right)$ (mit dem *Kehrbruch* multiplizieren, um alles auf einen Bruchstrich schreiben zu können)

Schritt 2: In Quadratzahlen zerlegen
$9 \cdot \left(\frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{72}}\right)$ (Zahlen unter den Brüchen zerlegen)

$9 \cdot \left(\frac{\sqrt{8 \cdot 4} \cdot \sqrt{2 \cdot 5}}{\sqrt{2 \cdot 4} \cdot \sqrt{8 \cdot 9}}\right)$ (Wurzeln in Zähler und Nenner zusammenfassen)

Schritt 3: Wurzeln auflösen und kürzen
$9 \cdot \left(\frac{\sqrt{8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5}}{\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 9}}\right)$ (Quadratwurzeln auflösen und kürzen)

$9 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{9 \cdot \sqrt{5}}{3} = 3\sqrt{5}$

Lösung:
$\mathbf{3\sqrt{5}}$

Aufgabe 5b)

Schritt 1: In Quadratzahlen zerlegen

$\sqrt{63} + 2\sqrt{28} - 3\sqrt{80}$ (Zahlen unter den Wurzeln zerlegen)

$\sqrt{7 \cdot 9} + 2\sqrt{4 \cdot 7} - 3\sqrt{20 \cdot 4}$ (Quadratzahlen auflösen, 20 weiter zerlegen)

$\sqrt{7} \cdot \sqrt{9} + 2\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} - 3\sqrt{20 \cdot 4} =$

$3 \cdot \sqrt{7} + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7} - 3 \cdot \sqrt{5 \cdot 4 \cdot 4} =$

$3 \cdot \sqrt{7} + 4 \cdot \sqrt{7} - 3 \cdot 4\sqrt{5} =$

Schritt 2: Term zusammenfassen

$3\sqrt{7} + 4\sqrt{7} - 12\sqrt{5} =$ (zusammenfassen)

$7\sqrt{7} - 12\sqrt{5}$

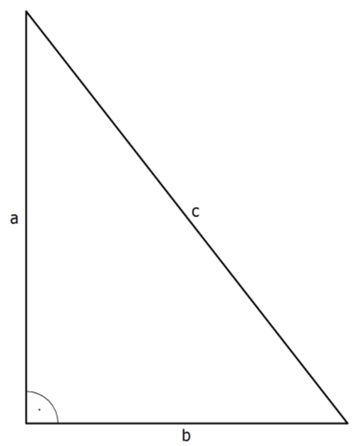
Lösung:

$7\sqrt{7} - 12\sqrt{5}$

Aufgabe 6

Schritt 1: Ansatz und Skizze

Dass eine Konstruktion mithilfe des Satz des Pythagoras ($c^2 = a^2 + b^2$) gefordert wird, lässt darauf schließen, dass du die Strecke der Länge $\sqrt{52}$ mithilfe eines rechtwinkligen Dreiecks konstruieren musst.



Man kann den Satz des Pythagoras auch umformen zu: $\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, das heißt, du suchst ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Länge $\sqrt{52}$ hat.

Schritt 2: $\sqrt{52}$ für c^2 einsetzen und Kathetenlängen bestimmen

Setze für $\sqrt{c^2}$ $\sqrt{52}$ ein.

$\sqrt{52} = \sqrt{a^2 + b^2}$

→ $52 = a^2 + b^2$

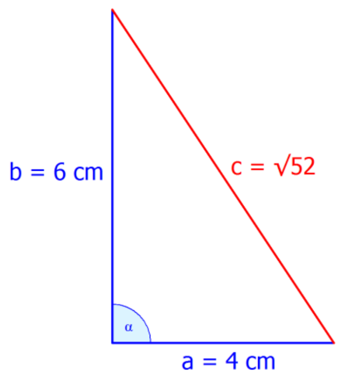
Damit die Gleichung aufgeht, benötigst du zwei Quadratzahlen, die addiert 52 ergeben. Dies ist für 16 und 36 der Fall, denn $16 + 36 = 52$.

Das heißt, dass zum Beispiel für $a^2 = 16$ und $b^2 = 36$ $c^2 = 52$ gilt.

Daraus folgt: Seitenlänge $a = 4\ cm$ und die Seitenlänge $b = 6\ cm$.

Überprüfen: $52 = 4^2 + 6^2$ → Gleichung ist erfüllt

Schritt 3: Dreieck/Strecke konstruieren



Lösung:

Eine Strecke der Länge $\sqrt{52}$ kann man mithilfe eines rechtwinkligen Dreiecks konstruieren, dessen Katheten die Länge $\mathbf{4\ cm\ und\ 6\ cm}$ haben.

Fazit:

Eher einfache Schulaufgabe, in der hauptsächlich Grundwissen der Trigonometrie sowie Wurzelberechnung abgefragt wird.