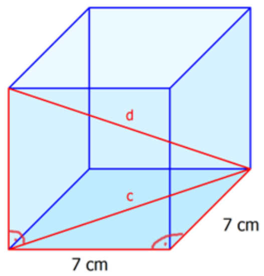
Aufgabe 1

Schritt 1: Ansatz und Skizze

Bei einem Würfel, bei dem ja alle Kantenlängen gleich sind, kannst du mit einer Raumdiagonale, einer senkrechten Kante und einer Decken- oder Bodendiagonalen ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Auch die beiden Kanten der Grundfläche bilden zusammen mit der Bodendiagonale ein rechtwinkliges Dreieck. Da du die Kantenlänge weißt (7 cm), kannst du zunächst die Boden-/Deckendiagonale mithilfe des Satz des Pythagoras berechnen.



Schritt 2: Berechnung

Bodendiagonale berechnen

Die Kanten der Grundfläche mit je 7 cm sind die Katheten a und b des rechtwinkligen Dreiecks, die Hypotenuse c ist die gesuchte Bodendiagonale c.

$7^2 + 7^2 = c^2$

$49 + 49 = c^2$

$98 = c^2 \quad |\sqrt{}$

$c = \sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

Raumdiagonale berechnen

Die Raumdiagonale d bildet mit der Bodendiagonalen und der anliegenden senkrechten Seitenkante wiederum ein rechtwinkliges Dreieck. (senkrechte Seitenkante und Bodendiagonale sind die Katheten; die Raumdiagonale d ist die Hypotenuse). Das heißt, du kannst auch die Raumdiagonale mithilfe des Satz des Pythagoras berechnen.

$7^2 + (7\sqrt{2})^2 = d^2$

$49 + 98 = d^2 \quad |\sqrt{}$

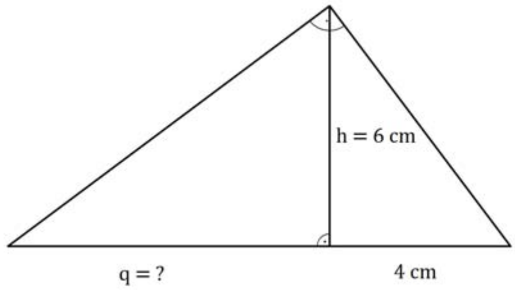
$d = \sqrt{147} \approx 12{,}12 \text{ cm}$

Lösung:

Die **Raumdiagonale** ist **ca. $\mathbf{12,12}$ cm** lang.

Aufgabe 2

Schritt 1:Ansatz mit dem Höhensatz



Die Höhe *h* teilt die untere Dreiecksseite in zwei Abschnitte *p* und *q*.

Der Höhensatz besagt, dass $h^2 = p \cdot q$ ist.

Schritt 2: Gleichung nach q auflösen und einsetzen

Zwei der drei Größen, die im Höhensatz auftauchen, sind gegeben (nämlich *h* und *p*). Die dritte (*q*) ist gesucht. Löse also die obige Gleichung $h^2 = p \cdot q$ nach *q* auf, indem du beide Seiten durch *p* teilst:

$$q = \frac{h^2}{p}.$$

In unserem Fall ist $p = 4\text{ cm}$ und $h = 6\text{ cm}$. Diese Größen setzt du jetzt in die Formel ein:

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{p} &= \frac{(6\text{ cm})^2}{4\text{ cm}}\\ &= \frac{36\text{ cm}^2}{4\text{ cm}}\\ &= 9\text{ cm}.\end{aligned}$$

Lösung:

q = 9 cm

Aufgabe 3

Hinweise zur Aufgabenstellung

Was ist mit Radizieren gemeint?

Das Radizieren ist die Umkehrung des Potenzierens. Man nennt es auch „Wurzel ziehen“. Dabei gilt es, die Wurzelgesetze zu beachten.

Was ist mit „fasse so weit wie möglich zusammen“?

Damit ist gemeint, einen Term so weit zu kürzen, bis man nichts mehr miteinander verrechnen kann, ohne lange Dezimalzahlen zu erhalten. Dabei musst du die Rechengesetze beachten.

Schritt 1: Term aufteilen

Term: $x^2\sqrt{49x^5}+\sqrt{25x^9}-\sqrt{64x^{13}}:x^2$ $\qquad x>0$

Damit dieser sehr lange Term übersichtlicher wird, ist es hilfreich, ihn zunächst in seine drei Summanden aufzuteilen. Du erhältst:

erster Summand: $\left(x^2\sqrt{49x^5}\right)$

zweiter Summand $(+\sqrt{25x^9})$

dritter Summand $(-\sqrt{64x^{13}}:x^2)$

Nun betrachtest diese Termteile einzeln und radizierst und vereinfachst. Am Ende schreibst du sie wieder zusammen und prüfst, was du verrechnen kannst.

Erster Summand

$x^2\cdot\sqrt{49x^5}$ (x^2 umformen und unter die Wurzel ziehen. Hierfür suchst du eine Wurzel, deren Ergebnis x^2 ist. Für $\sqrt{x^4}$ ist dies der Fall)

$\sqrt{x^4}\cdot\sqrt{49x^5}$ (zu einer Wurzel zusammenführen, dabei beachten, dass die Potenzen sich addieren (Potenzgesetze).

$\sqrt{49x^9}$ (Wurzeln so auseinanderziehen, dass du sie auflösen kannst)

$\sqrt{49}\cdot\sqrt{x^9}$

$7\cdot x^{\frac{9}{2}}$

Zweiter Summand

$+\sqrt{25x^9}$

$+\sqrt{25}\cdot\sqrt{x^9}$

$5\cdot x^{\frac{9}{2}}$

Dritter Summand

$-\sqrt{64x^{13}}:x^2=-\frac{\sqrt{64x^{13}}}{x^2}$

$-\frac{\sqrt{64}\cdot\sqrt{x^{13}}}{x^2}$

$-\frac{\sqrt{64}\cdot x^{\frac{13}{2}}}{x^2}$ (Kürzen: $-\frac{\sqrt{64}\cdot x^{\frac{13}{2}}}{x^2}=-\frac{\sqrt{64}\cdot x^{6,5}}{x^2}=-\sqrt{64}\cdot x^{6,5-2}=-\sqrt{64}\cdot x^{4,5}=-\sqrt{64}\cdot x^{\frac{9}{2}}$)

$-\sqrt{64}\cdot x^{\frac{9}{2}}$

Schritt 2: Term wieder zusammenführen

$7\cdot x^{\frac{9}{2}}+5\cdot x^{\frac{9}{2}}-\sqrt{64}\cdot x^{\frac{9}{2}}$ Wenn du jetzt die Zahlen unter den Wurzeln betrachtest, fällt auf, dass es sich um Quadratzahlen handelt. Also kannst du die Wurzeln auflösen.

$7 \cdot x^{\frac{9}{2}} + 5 \cdot x^{\frac{9}{2}} - 8 \cdot x^{\frac{9}{2}}$

Da x jetzt bei allen Termteilen die gleiche Potenz hat, kannst du die Teile miteinander verrechnen.

$7x^{\frac{9}{2}} + 5x^{\frac{9}{2}} - 8x^{\frac{9}{2}} = 4x^{\frac{9}{2}}$

Lösung:

$\mathbf{4x^{\frac{9}{2}}}$

Aufgabe 4

Hinweis zur Aufgabenstellung

Was heißt einen Term mit Potenzen so weit wie möglich vereinfachen/zusammenfassen?

Gemeint ist, den Term so weit zu berechnen oder umzustellen, bis man nichts mehr berechnen kann, ohne eine lange Dezimalzahl zu erhalten. Hierbei gilt es die Potenzgesetze und Wurzelgesetze zu beachten.

Aufgabe 4 a)

Schritt 1: Potenzgesetze anwenden

a) $(4^{-20})^{-\frac{3}{4}}$

(Regel zum Potenzieren von Potenzen)

$(4^{-20})^{-\frac{3}{4}} = 4^{20 \cdot \frac{3}{4}}$

Schritt 2: kürzen und vereinfachen

$4^{20 \cdot \frac{3}{4}} = 4^{\frac{20 \cdot 3}{4}} = 4^{\frac{5 \cdot 3}{1}} = 4^{15}$

Lösung:

$\mathbf{4^{15}}$

Aufgabe 4b)

Schritt 1: Potenzgesetze anwenden

b) $\sqrt[4]{10} \cdot \left(\sqrt[4]{1000} - \sqrt[4]{10^{-1}}\right)$

(Regeln zum teilweisen Potenzieren beachten)

$\sqrt[4]{10} \cdot \left(\sqrt[4]{1000} - \sqrt[4]{10^{-1}}\right) = \sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[4]{1000} - \sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[4]{10^{-1}} =$

$= \sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[4]{10 \cdot 10 \cdot 10} - \sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{10}} = \sqrt[4]{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} - \sqrt[4]{10 \cdot \frac{1}{10}} =$

Schritt 2: Wurzel in eine Potenz umwandeln

$= \sqrt[4]{10^4} - \sqrt[4]{\frac{10}{10}}$ (Wurzel in eine Potenz umwandeln)

$\left(\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}\right).$

$= 10^{\frac{4}{4}} - \sqrt[4]{1} = 10^1 - 1 = 10 - 1 = 9.$

Lösung:

$\mathbf{9}$

Aufgabe 4 c

Schritt 1: Wurzel in eine Potenz umwandeln

c) $\left(\sqrt[5]{3^7} + 4\sqrt[5]{3^7}\right) \cdot 3^{\frac{4}{5}}$ (Wurzelgesetze beachten und umwandeln)

$\left(\sqrt[5]{3^7} + 4\sqrt[5]{3^7}\right) \cdot 3^{\frac{4}{5}} = \left(3^{\frac{7}{5}} + 4 \cdot 3^{\frac{7}{5}}\right) \cdot 3^{\frac{4}{5}} =$ (in der Klammer zusammenrechnen)

$= 5 \cdot 3^{\frac{7}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}} = 5 \cdot 3^{\frac{7}{5}+\frac{4}{5}} = 5 \cdot 3^{\frac{11}{5}}$ (Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis)

Lösung:

$\mathbf{5 \cdot 3^{\frac{11}{5}} = 5 \cdot \sqrt[5]{3^{11}} = 5 \cdot \left(\sqrt[5]{3}\right)^{11}}$

Aufgabe 5

Hinweise zur Aufgabenstellung

Was ist eine Definitionsmenge?

Bei einer Definitionsmenge eines Terms, einer Gleichung oder einer Funktion sind Zahlen gesucht, bei denen es erlaubt ist, sie für die Variablen (z.B. x) einzusetzen. Um die Definitionsmenge zu bestimmen, musst du dich mit den Rechengesetzen auskennen, wie zum Beispiel die zu Brüchen, Potenzen oder zu Wurzeln. Oft ist es am günstigsten, die Werte zu suchen, die nicht eingesetzt werden dürfen und diese dann von der Definitionsmenge aller Zahlen $\mathbb{R}$ ausschließt (/ { }).

Was ist eine Lösungsmenge?

Wird nach der Lösungsmenge einer Gleichung gesucht, so gilt es die Zahlen zu finden, die man für die Variablen (z. B. x) einzusetzen kann, damit die Gleichung eine wahre Aussage ergibt. Dabei wird die Gleichung nach den entsprechenden Variablen aufgelöst.

Aufgabe 5a)

Schritt 1: Definitionsmenge bestimmen

Bei Teil a) tauchen keine Brüche, Wurzeln oder Potenzen mit negativem Exponenten auf. Die in der Gleichung vorkommenden Terme sind also alle auf ganz $\mathbb{R}$ definiert:

$\Longrightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}$

Schritt 2: Gleichung lösen

$(2z-1)^2 + (1+2z)^2 = 10$ (binomische Formeln anwenden)

$(2z)^2 - 2z \cdot 1 \cdot 2 + 1^2 + (2z)^2 + 1 \cdot 2z \cdot 2 + 1^2 \ = 10$

$-4z + 4z^2 + 4z + 4z^2 = 8$ (Die Vielfachen von z heben sich auf.)

$8z^2 = 8 \qquad |\div 8$

$z^2 = 1 \qquad |\sqrt{}$

$|z| = 1 \ \ => \ z \in \{-1; 1\}$

Das heißt, die Gleichung ist erfüllt, wenn z die Werte ± 1 annimmt.

Lösung:

$\mathbb{L} = \{\mathbf{-1}; \mathbf{1}\}$

Aufgabe 5b)

Schritt 1: Definitionsmenge bestimmen

Hier taucht eine Wurzel auf. Der Ausdruck unter der Wurzel darf nicht negativ werden (Regel). Der Wurzelterm ist also genau dort definiert, wo $4z^2 - 15 \geq 0$ erfüllt ist. Diese Ungleichung vereinfachst du wie folgt:

$4z^2 - 15 \geq 0$ (nach z auflösen)

$4z^2 - 15 \geq 0 \qquad |+15$

$4z^2 \geq 15 \qquad |\div 4$

$z^2 \geq \frac{15}{4} \qquad |\sqrt{}$

$|z| \geq \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

→ Der Wurzelterm ist für alle z, die kleiner gleich $-\frac{\sqrt{15}}{2}$ und größer gleich $+\frac{\sqrt{15}}{2}$ sind, definiert.

Lösung

$\Rightarrow \mathbb{D} = \left]-\infty; -\frac{\sqrt{15}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{15}}{2}; \infty\right[$

Schritt 2: Gleichung lösen

Wenn du eine Wurzelgleichung lösen musst, versuche immer die Wurzel auf einer Seite der Gleichung zu isolieren und alle anderen Terme auf die andere Seite zu bringen.

$5 = 2z - \sqrt{4z^2 - 15} \qquad | + \sqrt{4z^2 - 15} \quad |-5$

$\sqrt{4z^2 - 15} = 2z - 5 \qquad |\ ^2$

$4z^2 - 15 = (2z - 5)^2$ (mithilfe der 2. binomischen Formel vereinfachen)

$4z^2 - 15 = 4z^2 - 20z + 25 \quad |+15 \quad |-4z^2 + 20z$ (alle z auf eine Seite bringen)

$4z^2 - 4z^2 + 20z = 25 + 15$ (Die Vielfachen von z² heben sich gegenseitig auf.

$20z = 40 \qquad |\div 20$ (nach z auflösen)

$z = \frac{40}{20} = \frac{2}{1} = 2$

Diese Rechnung zeigt: die Gleichung hat höchstens eine Lösung. Wenn es eine gibt, dann z=2.

In der Herleitung wurde quadriert. Da das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, musst du das Ergebnis prüfen. Setze also z=2 in die Gleichung ein und prüfe, ob die Gleichung dann stimmt:

$5 = 2 \cdot 2 - \sqrt{4 \cdot 2^2 - 15} = 4 - \sqrt{1} = 3$ Das ist eine falsche Aussage, also ist 2 keine Lösung der Gleichung. Da aber 2 der einzige Kandidat ist, gibt es keine Lösung. Die Lösungsmenge ist also leer.-

Lösung

$\mathbb{L} = \emptyset$

Aufgabe 6

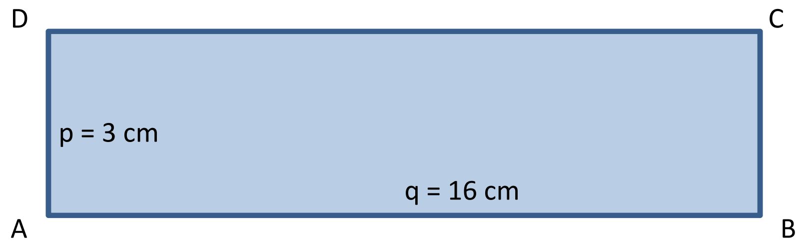
Schritt 1: Ansatz und Skizze

Wie konstruiere ich aus einem Rechteck ein flächengleiches Quadrat?

Zur Anwendung kommen hier der Thaleskreis, der Höhensatz und der Satz des Pythagoras. Gesucht ist ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete die Kantenlänge des Quadrates ist.

Skizze

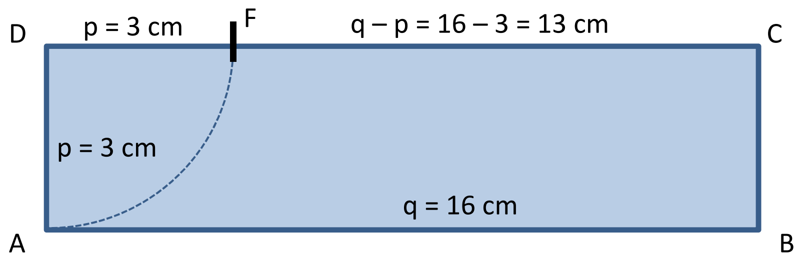
Skizziere das Rechteck mit den Kantenlängen [AB] = [CD] = 16 cm und [AD] = [BC] = 3 cm.



Schritt 2: Festlegen der Hypotenuse und der Hypotenusenabschnitte

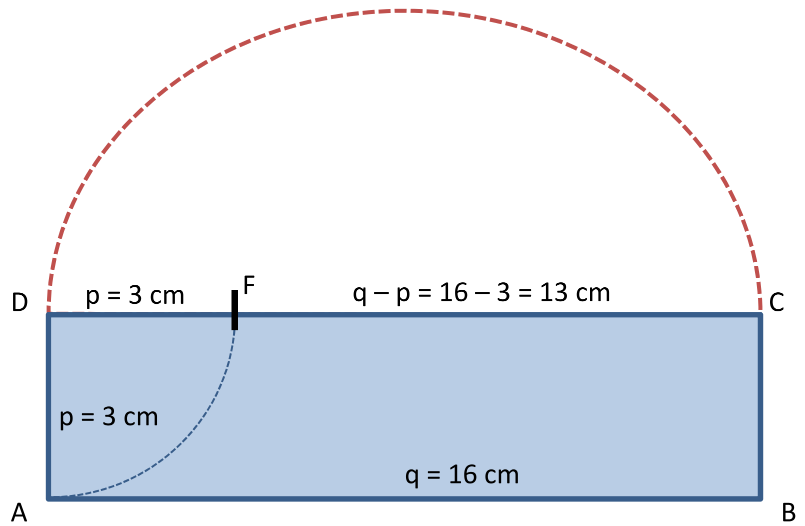
Hierfür legst du fest, dass die Hypotenuse die Strecke [CD] ist. Zeichne vom einen Eckpunkt der Hypotenuse einen Kreis mit dem Radius $p = 3\ cm$.

Der Schnittpunkt F dieses Kreises mit der Kante [CD] teilt die Hypotenuse [CD] in den Bereich p und q-p. .



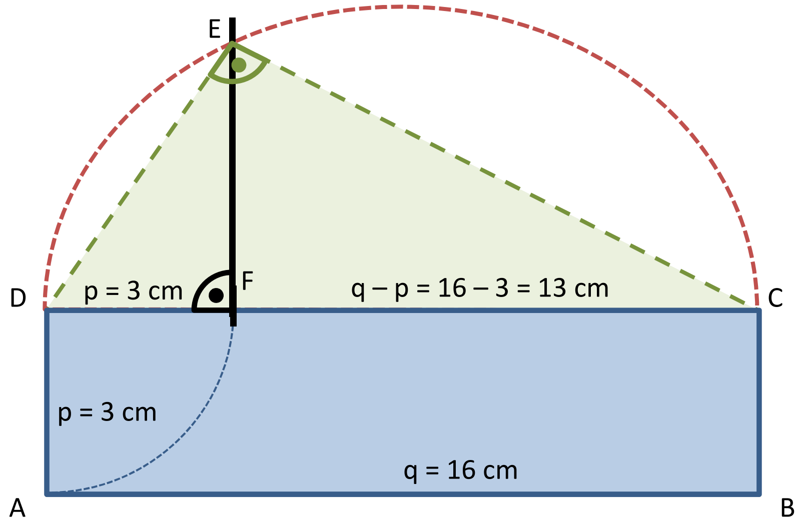
Schritt 3: Einzeichnen des Thaleskreises

Zeichne den Thaleskreis vom Mittelpunkt der Kante [CD) mit dem Durchmesser [CD] ein.



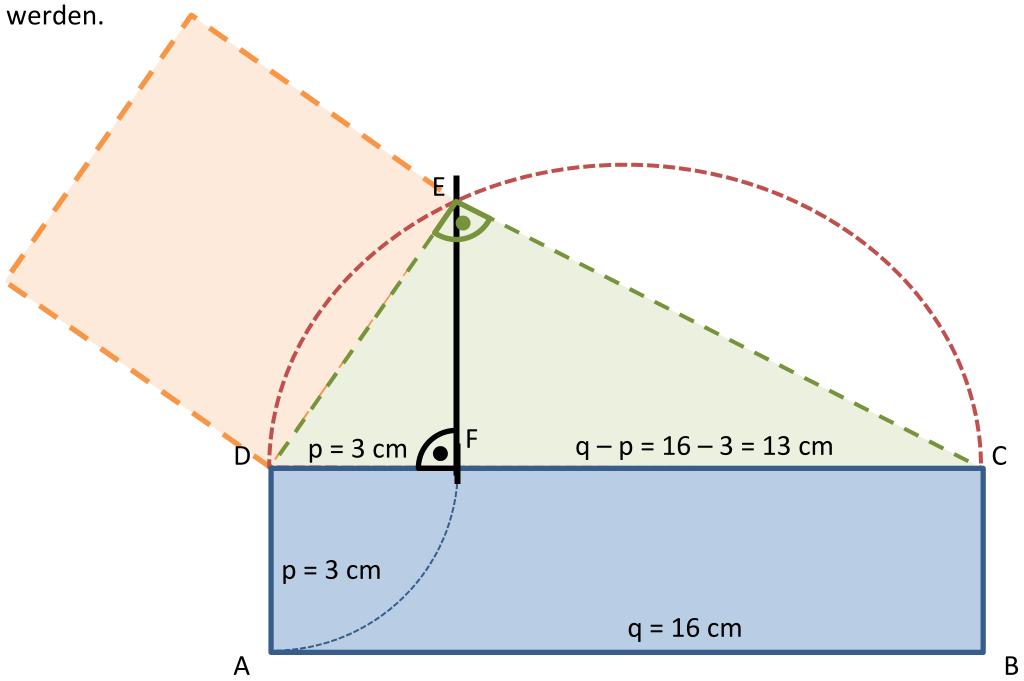
Schritt 4: Konstruktion des dritten Punktes

Wir brauchen noch einen Punkt E für das gesuchte rechtwinklige Dreieck DCE. Hierfür gehst du senkrecht von dem Schnittpunkt F nach oben, bis du den Thaleskreis schneidest. Dieser Schnittpunkt ist unser Punkt E. Somit lässt sich das Dreieck zeichnen.



Schritt 5: Berechnung der Kantenlänge des Quadrats

Die Kantenlänge des Quadrats ist die Kante [ED] des rechtwinkligen Dreiecks DCE. Diese soll nun berechnet werden.



Zunächst berechnest du mithilfe des Höhensatzes die Höhe [FE] des rechtwinkligen Dreiecks DCE.

Höhensatz: $h^2 = p \cdot (c - p)$

$h^2 = 3 \cdot (16 - 3)$

$h^2 = 39 \quad |\sqrt{\ }$

$h = \sqrt{39} \quad (\approx 6{,}24\ cm)$

Die Seitenlänge [DE] berechnest du mithilfe des Satz des Pythagoras:

$[ED]^2 = [DF]^2 + [FE]^2$

$[ED]^2 = 3^2 + h^2 = 3^2 + 39$

$[ED]^2 = 48 \quad |\sqrt{\ }$

$[ED] = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93\ cm$

Wir überprüfen: $16 \cdot 3 = 48$ stimmt mit $[ED]^2 = 48$ überein.

Lösung:

Das flächengleiche Quadrat hat die Kantenlänge $[\boldsymbol{ED}] = \sqrt{\mathbf{48}} = \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}} \approx \mathbf{6,93}\ \boldsymbol{cm}$.

Fazit:

Machbare Schulaufgabe mit Anwendungen des Satz des Pythagoras sowie des Katheten- und Höhensatzes.