Aufgabe 1

Schritt 1: Bedeutung rationale bzw. irrationale Zahl klären

Rationale Zahlen sind positive Bruchzahlen $\mathbb{Q}^+$, ihre Gegenzahlen und die Null. Also alle Zahlen, die als Quotient zweier ganzer Zahlen dargestellt werden können.

Irrationale Zahlen sind unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen. Also Zahlen, die nicht als Quotient ganzer Zahlen dargestellt werden können. Dazu gehören alle Wurzeln aus natürlichen Zahlen, die keine Quadratzahlen sind.

Schritt 2: Lösung angeben

	rational	irrational	Begründung
$\sqrt{6}$		x	$\sqrt{6}$ ist eine irrationale Zahl, denn 6 ist keine Quadratzahl.
$\frac{\sqrt{2}}{2}$		x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ist eine irrationale Zahl, denn 2 ist keine Quadratzahl, also ist die Wurzel aus zwei eine irrationale Zahl und daher auch jedes Vielfache und jeder Bruchteil von $\sqrt{2}$.
$\sqrt{\frac{16}{64}}$	x		$\sqrt{\frac{16}{64}}$ ist eine rationale Zahl, denn $\sqrt{\frac{16}{64}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.
$\sqrt{\frac{50}{196}}$		x	$\sqrt{\frac{50}{196}}$ ist eine irrationale Zahl, denn $\sqrt{\frac{50}{196}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{196}} = \frac{\sqrt{50}}{14}$ und 50 ist keine Quadratzahl. Daher ist $\sqrt{50}$ irrational und somit auch jedes Vielfache und jeder Bruchteil davon.

Aufgabe 2

Schritt 1: Behauptung $\sqrt{y^2} = y$ prüfen

Um die Aufgabe zu lösen, muss man wissen, dass Quadratwurzeln immer größer oder gleich null sind. Für jedes y ist also $\sqrt{y^2} \geq 0$, auch wenn $y < 0$ ist. Für $y = -1$ würde die Behauptung lauten: $\sqrt{(-1)^2} = -1$, was eindeutig falsch ist.

Schritt 2: Schlussfolgerung und Lösung

Die Behauptung von Thomas stimmt nicht.

Hinweis: Es gilt immer $\sqrt{y^2} = |y|$ und für $y \geq 0$ gilt sogar $\sqrt{y^2} = y$.

Aufgabe 3

Hinweis zur Aufgabenstellung

Was ist mit rational machen des Nenners gemeint?

Enthält der Nenner eine Wurzel, muss der Bruch so umgeformt werden, dass im Nenner keine Wurzel mehr auftaucht. Dies erreichst du durch Kürzen und Erweitern und durch die Anwendung der binomischen Formeln.

Was ist mit „vereinfache so weit wie möglich“ gemeint?

Damit ist gemeint, einen Term so weit zu kürzen, bis man nichts mehr miteinander verrechnen kann, ohne lange Dezimalzahlen zu erhalten. Dabei musst du die Rechengesetze beachten.

Aufgabe3a)

$\frac{5+4\sqrt{8}}{6-\sqrt{8}}$

Schritt 1: Nenner rational machen

Hier kannst du die dritte binomische Formel anwenden. Dazu erweiterst du den Term mit $(6+\sqrt{8})$.

$$\frac{(5+4\sqrt{8})\cdot(6+\sqrt{8})}{(6-\sqrt{8})\cdot(6+\sqrt{8})}=\frac{30+24\sqrt{8}+5\sqrt{8}+4\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}{(6)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}$$

Schritt 2: Vereinfachen

$=\frac{30+29\sqrt{8}+4\cdot 8}{36-8}=\frac{30+29\sqrt{8}+32}{28}=\frac{62+29\sqrt{8}}{28}$

Lösung:

$\mathbf{\frac{31+29\sqrt{2}}{14}}$

Aufgabe 3b)

a) $\frac{a+6b}{\sqrt{3a}}-\frac{2b\sqrt{3a}}{a}$

Schritt 1: Nenner rational machen

Der zweite Teil des Terms, $\frac{2b\sqrt{3a}}{a}$, ist bereits rational → kann zunächst vernachlässigt werden, darf aber später beim Vereinfachen nicht vergessen werden

Der erste Teil des Terms muss mit $\sqrt{3a}$ erweitert werden, damit die Wurzel im Nenner verschwindet:

$\frac{(a+6b)\cdot\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}\cdot\sqrt{3a}} - \frac{2b\sqrt{3a}}{a} = \frac{a\sqrt{3a}+6b\sqrt{3a}}{3a} - \frac{2b\sqrt{3a}}{a}$

$= \frac{a\sqrt{3a}+6b\sqrt{3a}}{3a} - \frac{2b\sqrt{3a}}{a}$

Schritt 2: Vereinfachen

Du kannst diesen Term mit nur einem Bruch darstellen. Dazu musst du die beiden Brüche durch Erweiterung mit 3 auf einen Nenner bringen.

$\frac{a\sqrt{3a}+6b\sqrt{3a}}{3a} - \frac{2b\sqrt{3a}\cdot 3}{a\cdot 3} = \frac{a\sqrt{3a}+6b\sqrt{3a}}{3a} - \frac{6b\sqrt{3a}}{3a}$ (Jetzt kann alles auf einen Bruchstrich geschrieben werden)

$= \frac{a\sqrt{3a}+6b\sqrt{3a}-6b\sqrt{3a}}{3a} =$ (Im Zähler hebt sich $6b\sqrt{3a} - 6b\sqrt{3a}$ auf)

$= \frac{a\sqrt{3a}}{3a} =$ (Mit a kürzen)

$= \frac{\sqrt{3a}}{3}$

Lösung:

$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3a}}{3}}$

Aufgabe 4

Hinweis zur Aufgabenstellung

Zur Lösung dieser Aufgabe benötigst du das Heron-Verfahren. Bei diesem Verfahren berechnest du immer bessere Näherungswerte für Wurzeln durch wiederholte Mittelwertbestimmung der bereits bestimmten Näherungswerte.

Gesucht ist die Lösung mit 5 Nachkommastellen von $\sqrt{12}$.

Schritt 1: Intervall festlegen

Lege zwei bekannte Quadratwurzeln fest, von denen du weißt, dass $\sqrt{12}$ dazwischen liegen muss.

$\sqrt{9}$ und $\sqrt{16}$

Damit liegt $\sqrt{12}$ im Intervall $[3; 4]$.

Schritt 2 Näherungswerte bestimmen

Du beginnst mit einem der beiden Näherungswerte (Spalte 1 – Näherung a). Anschließend teilst du den Wert unter der Wurzel durch diesen Näherungswert, um einen zweiten Näherungswert zu erhalten (Spalte 2, Näherung b). Du kannst schlussfolgern, dass $\sqrt{12}$ zwischen Näherungswert a und b liegen muss (Spalte 3 – bedeutet). Um die Näherung zu verdichten, bildest du aus deinen Näherungswerten a und b das arithmetische Mittel(Spalte 4) Das Ergebnis ist dein neuer Näherungswert a. Dieses Verfahren wiederholst du so oft, bis du eine zufriedenstellenden Näherung für $\sqrt{12}$erhältst, heißt, bis der Abstand zwischen Näherung a und Näherung b nur noch minimal ist.

Näherung a	**Näherung b**	**bedeutet**	**Mittelwert**
3	$\frac{12}{3} = 4$	$3 < \sqrt{12} < 4$	$\frac{3+4}{2}$
3,5	$\frac{12}{3{,}5} \approx 3{,}42857$	$3{,}42857 < \sqrt{12} < 3{,}5$	$\frac{3{,}5 + 3{,}42857}{2}$
3,46429	$\frac{12}{3{,}456} \approx 3{,}4639$	$3{,}4639 < \sqrt{12} < 3{,}46429$	$\frac{3{,}4639 + 3{,}46429}{2}$
3,464095			

Zufriedenstellender Näherungswert erreicht.

Lösung:

$\boldsymbol{\sqrt{12} \approx 3{,}46410}$

Aufgabe 5 a)

Schritt 1:Nenner gleich Null setzen

Term: $S(x) = \frac{4}{\sqrt{7x^2 - x}}$

Bei dem Term $S(x)$ handelt es sich um einen Bruch, also um eine gebrochen rationale Funktion. Hier gilt die Regel, dass der Nenner nicht Null werden darf. Wir suchen also nach Werten, die den Nenner null werden lassen. Damit wissen wir, welche Werte *nicht* eingesetzt werden dürfen.

$\sqrt{7x^2} - x = 0$ (nach x auflösen)

$\sqrt{7x^2} - x = 0$ (x auf die andere Seite bringen)

$\sqrt{7x^2} = x$ (quadrieren)

$\left(\sqrt{7x^2}\right)^2 = x^2$

$7x^2 = x^2$ $(-x^2)$

$6x^2 = 0 \quad | \div 6$ (6 auf die andere Seite bringen, damit x^2 alleine steht)

$x^2 = 0 \quad | \sqrt{}$ (Wurzelziehen, um x zu erhalten)

$x = 0$

→ Der Nenner wird nur dann Null, wenn für $x = 0$ eingesetzt wird.

Für die Lösung heißt das, dass alle reellen Zahlen außer null eingesetzt werden dürfen.

Schritt 2: Definitionsmenge angeben

$\mathbb{D} = \mathbb{R} / \{\mathbf{0}\}$

Aufgabe 5 b)

Schritt 1: Nenner rational machen

Der Term muss so umgeformt werden, dass im Nenner keine Wurzel mehr steht, d.h. der Nenner muss rational gemacht werden. Dazu benutzt du die 3. binomische Formel.

Term: $S(x) = \frac{4}{\sqrt{7x^2}-x}$

Term mit n $\left(\sqrt{7x^2}+x\right)$ erweitern

$$S(x) = \frac{4\cdot\left(\sqrt{7x^2}+x\right)}{\left(\sqrt{7x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{7x^2}+x\right)} = \frac{4\sqrt{7x^2}+4x}{\left(\sqrt{7x^2}\right)^2-(x)^2} = \frac{4\sqrt{7x^2}+4x}{7x^2-x^2}$$

Schritt 2: Term vereinfachen

Zur Vereinfachung des Terms wendest du die Rechenregeln für Quadratwurzeln an.

$\frac{4\sqrt{7}\sqrt{x^2}+4x}{7x^2-x^2} = \frac{4\sqrt{7}x+4x}{6x^2} = \frac{4x\sqrt{7}+4x}{6x^2} = \frac{4x\left(\sqrt{7}+1\right)}{6x^2} = \frac{2\left(\sqrt{7}+1\right)}{3x}$ Der Nenner ist nun rational.

Lösung: $\frac{2\sqrt{7}+2}{3x}$

Aufgabe 5 c)

Schritt 1: Gleichung aufstellen

Um zu prüfen, für welche Einsetzung/en man den Termwert $\sqrt{8}$ erhält, stellst du eine entsprechende Gleichung auf.

$\frac{4\sqrt{7}+4}{6x} = \sqrt{8}$

Schritt 2: Gleichung nach x auflösen

Jetzt muss die Gleichung nach x aufgelöst werden, um den Wert/die Werte für x zu erhalten, für die die Gleichung stimmt.

Den Bruch lässt du verschwinden, indem du überkreuz multiplizierst. Dafür machst du aus der rechten Seite des Terms einen „Hilfs“-Bruch.

$\frac{4\sqrt{7}+4}{6x} = \frac{\sqrt{8}}{1}$ (Bruch auflösen)

$6x \cdot \sqrt{8} = \left(4\sqrt{7} + 4\right) \cdot 1$

$6x \cdot \sqrt{8} = 4\sqrt{7} + 4 \quad | \div 6\sqrt{8}$ (x auf eine Seite bringen)

$x = \frac{4\sqrt{7}+4}{6\sqrt{8}} = 0{,}8593118249 \ldots \approx 0{,}86$ (Lösung auf zwei Nachkommastellen angeben)

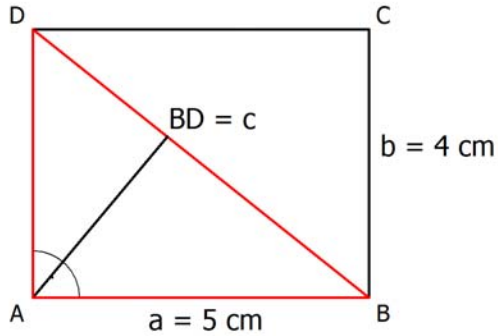
Das heißt, wenn man in den Term $S(x) = \frac{4}{\sqrt{7x^2-x}}$ für $x = 0{,}86$ einsetzt, erhält man das Ergebnis $\sqrt{8}$.

Lösung:

$\boldsymbol{x = 0,86}$

Aufgabe 6 a)

Schritt 1:Formel zur Berechnung ermitteln



Die Diagonale $\overline{BD}$ teilt das Rechteck ABCD in drei rechtwinklige Dreiecke. Die Diagonale entspricht der Hypotenuse des Dreiecks ABD. Da die Seiten a und b des Dreiecks gegeben sind, kannst du die Seite c = $\overline{BD}$ mithilfe des Satz von Pythagoras berechnen.

Schritt 2: Satz des Pythagoras anwenden

$5^2 + 4^2 = c^2$

$25 + 16 = c^2$

$41 = c^2 \quad |\sqrt{}$

$\sqrt{41} = c$

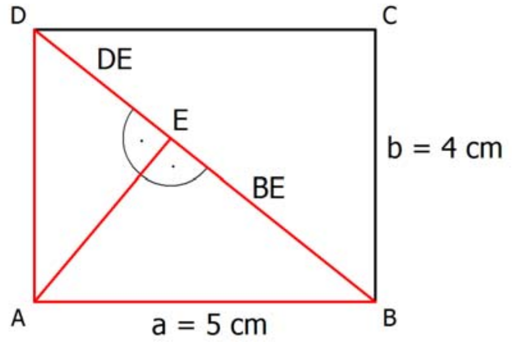
$c = 6{,}403124 \ldots \approx 6{,}40\ cm$

Lösung:

$\boldsymbol{\overline{BD} = 6,40\ cm}$

Aufgabe 6 b)

Schritt 1: Formeln zur Berechnung ermitteln



In der linken Hälfte des von der Diagonalen geteilten Rechtecks befinden sich die rechtwinkligen Dreiecke AED und AEB. ($\overline{\text{AE}} \perp \overline{BD}$)

Die Diagonale $\overline{BD}$ kann man in die Strecken $\overline{BE}$ und $\overline{DE}$ einteilen. Somit kannst du festlegen:

$\overline{BE} = \overline{BD} - \overline{DE} = 6{,}40 - \overline{DE}$

Somit haben wir die Strecke $\overline{BE}$ in Abhängigkeit von $\overline{DE}$ gestellt und können mithilfe des Satz von Pythagoras zwei Gleichungen aufstellen und anschließend gleichsetzen.

Schritt 2: Gleichungen aufstellen und gleichsetzen

1. Gleichung

$\overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = b^2$ (durch Umformen erhält man: $\overline{AE}^2 = b^2 - \overline{DE}^2$)

2. Gleichung

$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = a^2$ (durch Umformen erhält man: $\overline{AE}^2 = \text{a}^2 - \overline{BE}^2$)

Gleichungen gleichsetzen

$b^2 - \overline{DE}^2 = a^2 - \overline{BE}^2$

Schritt 3: Längen berechnen

Länge $\overline{\text{DE}}$ berechnen

Da du in Aufgabenteil a) die Länge der Strecke $\overline{BD} = 6{,}40\ cm$ schon berechnet hast, kannst du diesen Wert einsetzen. Damit enthält deine Gleichung nur noch eine Variable.

→ $\overline{BE} = \overline{BD} - \overline{DE} = 6{,}40 - \overline{DE}$

$b^2 - \overline{DE}^2 = a^2 - (6{,}40 - \overline{DE})^2$ (ausmultiplizieren)

$b^2 - \overline{DE}^2 = a^2 - (6{,}40^2 - 2 \cdot 6{,}40 \cdot \overline{DE} + \overline{DE}^2)$

$b^2 - \overline{DE}^2 = a^2 - 40{,}96 + 12{,}8\overline{DE} - \overline{DE}^2$ (nach $\overline{DE}$ auflösen)

$b^2 - \overline{DE}^2 = a^2 - 40{,}96 + 12{,}8\overline{DE} - \overline{DE}^2 \quad | + \overline{DE}^2 \quad | - a^2 + 40{,}96$

$b^2 - a^2 + 40{,}96 = 12{,}8\overline{DE} - \overline{DE}^2 + \overline{DE}^2 \quad | \div 12{,}8$

$\frac{b^2 - a^2 + 40{,}96}{12{,}8} = \overline{DE}$

$\boldsymbol{\overline{DE}} = \frac{5^2 - 4^2 + 40{,}96}{12{,}8} = 3{,}903125 \approx \mathbf{3{,}90\ cm}$

Länge $\overline{BE}$ berechnen

Nun kann man die Formel $\overline{BE} = \overline{BD} - \overline{DE} = 6{,}40 - \overline{DE}$ auflösen.

$\overline{BE} = \overline{BD} - \overline{DE} = 6{,}40 - 3{,}90 = \mathbf{2{,}50\ cm}$

Länge $\overline{\text{AE}}$ berechnen

Nun kannst du die zwei Längen $\overline{BE}$ und $\overline{DE}$ in eine der beiden Gleichungen einsetzen (egal welche), um die Länge von $\overline{AE}$ zu erhalten.

z.B. erste Gleichung: nach $\overline{AE}$ auflösen

$\overline{AE}^2 = b^2 - \overline{DE}^2$

$\overline{AE}^2 = 5^2 - 3{,}90^2$

$\overline{AE}^2 = 9{,}79 \quad |\sqrt{\ }$

$\boldsymbol{\overline{AE}} = \sqrt{9{,}79} = \mathbf{3{,}13\ cm}$

Lösung:

$\boldsymbol{\overline{DE} = 2{,}50\ cm, \overline{BE} = 3{,}90\ cm, \overline{AE} = 3{,}13\ cm}$

Fazit:

Standardschulaufgabe, in welcher hauptsächlich allgemeine Themen wie Definitionsmengen und irrationale Zahlen abgefragt werden.