Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 6 Stochastik

Nordrhein-Westfalen 2014LK

Aufgabe 6

a)

(1) 1. SCHRITT: MODELLIERUNG MIT EINER BERNOULLIKETTE

Wir modellieren die Situation mit einer Bernoullikette X der Länge $n = 200$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}25$. Ein Treffer entspricht einem weiblichen Zuschauer. Aus den kumulativen Verteilungstabellen entnimmt man $F(200; 0{,}25; 48) \approx 0{,}4083$ und $F(200; 0{,}25; 47) \approx 0{,}3458$. Also ist

$$\begin{aligned} P(X = 48) &= F(200; 0{,}25; 48) - F(200; 0{,}25; 47) \\ &\approx 0{,}4083 - 0{,}3458 = 0{,}0625. \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 6,25 % sind von den 200 Zuschauern 48 weiblich.

(2) 1. SCHRITT: MODELLIERUNG MIT EINER BERNOULLIKETTE

Es ist

$$\begin{aligned} P(35 \leq X \leq 60) &= F(200; 0{,}25; 60) - F(200; 0{,}25; 34) \\ &\approx 0{,}9546 - 0{,}0044 = 0{,}9502 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 95 % sind von den 200 Zuschauern zwischen 35 und 60 weiblich.

(3) 1. SCHRITT: INTERVALLE BESTIMMEN

Der Erwartungswert beträgt $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}25 = 50$. Gesucht ist also $P(|X - 50| \geq 10) = P(X \geq 60) + P(X \leq 40)$.

(3) SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN

Es ist $P(X \geq 60) = 1 - P(X \leq 59) \approx 1 - 0{,}9375 = 0{,}0625$ und $P(X \leq 40) \approx 0{,}0578$, also

$$P(|X - 50| \geq 10) \approx 0{,}0625 + 0{,}0578 = 0{,}1203.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also gut 12 %.

b)

(1) 1. SCHRITT: ERWARTUNGSWERT UND STANDARDABWEICHUNG BERECHNEN

Der Erwartungswert für die Anzahl X der weiblichen Zuschauer beträgt $\mu = n \cdot p = 20000 \cdot 0{,}25 = 5000$. Gesucht ist das kleinste $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$P(5000 - k \leq X \leq 5000 + k) \geq 0{,}9$.

Die Standardabweichung von X ist

$\sigma = \sqrt{20000 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} \approx 61{,}24 > 3$.

Die Laplace-Bedingung für die Anwendung der σ-Regeln ist also erfüllt.

(1) 2. SCHRITT: INTERVALLGRENZEN BERECHNEN

Nach den σ-Regeln gilt $P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}9$. Also ist das das gesuchte k näherungsweise gegeben durch

$1{,}64 \cdot \sigma \approx 1{,}64 \cdot 61{,}24 \approx 100{,}43$.

Aufrundung der Obergrenze von $\mu + 1{,}64\sigma \approx 5100{,}43$ zu 5101 und Abrundung der Untergrenze von $\mu - 1{,}64\sigma \approx 4899{,}57$ zu 4899 liefert das Intervall [4899; 5101].

(2) 1. SCHRITT: VORAUSSETZUNG FÜR BERECHNUNG DER WAHRSCHEINLICHKEIT NENNEN

Die Anwendung der Bernoulli-Formel mit Parametern $n = 50$ und $p = 0{,}25$ für $k = 12$ Treffer setzt voraus, dass die Anzahl der weiblichen Zuschauer in der Schlange binomialverteilt ist. Insbesondere sollte dann gewährleistet sein, dass ein Zuschauer in der Schlange unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit 0,25 weiblich ist.

Diese Unabhängigkeitsbedingung ist für einen kleinen Stichprobenumfang eher unrealistisch, weil sich oft die Mitglieder von Fanclubs mit stark abweichender Geschlechterverteilung zusammen anstellen. Da aber derartige Gruppen selten mehr als 10 Zuschauer umfassen, kann man erwarten, dass sich dieser Effekt beim vorliegenden Stichprobenumfang von 50 Personen nahezu nivelliert.

Somit ist die angegebene Berechnungsformel für Zwecke der groben Schätzung brauchbar.

c)

(1) 1. SCHRITT: ANTEIL DER MÄDCHEN BERECHNEN

Der Anteil der Mädchen im DFB beträgt $0{,}1584 \cdot 0{,}3178 \approx 0{,}0503 \approx 5$ %.

(2) 1. SCHRITT: ANTEIL DER „SENIOREN"

Der Anteil der „Senioren" ist der Anteil der „Männer" ohne den Anteil der „Junioren": $P(\text{Senior}) = P(\text{männlich}) - P(\text{Junior})$.

Dabei ist $P(\text{männlich}) = 1 - P(\text{weiblich}) = 1 - 15{,}84\ \% = 84{,}16\ \%$.

Die „Junioren" sind die Jugendlichen ohne die „Mädchen", nach Teilaufgabe c) (1) also etwa $33{,}09\ \% - 5{,}03\ \% = 28{,}06\ \%$.

Einsetzen der braunen Anteile in die grüne Formel liefert den Anteil der „Senioren", nämlich etwa $84{,}16\ \% - 28{,}06\ \% = 56{,}1\ \%$.

(2) 2. SCHRITT: ANZAHL DER MITGLIEDER DES DFB BERECHNEN

Die 1.077.215 weiblichen Mitglieder bilden etwa 15,85 % des DFG, also ist die Gesamtzahl der Mitglieder

$$\frac{1077215}{0{,}1584} \approx 6.800.600.$$

(2) 3. SCHRITT: ANZAHL DER „SENIOREN" BERECHNEN

Der Anteil der Senioren beträgt etwa 56,1 %, das entspricht etwa $6800600 \cdot 0{,}561 \approx 3.815.137$ Personen.

(3) 1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT ERMITTELN

Wegen der großen Zahl an Mitgliedern beider Kategorien kann man näherungsweise mit dem Modell „Ziehen mit Zurücklegen" arbeiten und erhält die gewünschte Wahrscheinlichkeit als Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Kombinationen „Junior-Senior" und „Senior-Junior":

$$\begin{aligned} P(\text{Junior-Senior}) + P(\text{Senior-Junior}) &= P(\text{Junior}) \cdot P(\text{Senior}) + P(\text{Senior}) \cdot P(\text{Junior}) \\ &\approx 0{,}2806 \cdot 0{,}561 + 0{,}561 \cdot 0{,}2806 \\ &\approx 0{,}3148 \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 31,5 %.

d)

(1) 1. SCHRITT: WAHL DER NULLHYPOTHESE BEGRÜNDEN

Mögliche Nullhypothesen sind

entweder

a) $p \leq 0{,}25$ („Höchstens 25 % der Zuschauer sind weiblich.")

oder

b) $p > 0{,}25$ („Mehr als 25 % der Zuschauer sind weiblich.").

Das Signifikanzniveau begrenzt die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art (die Nullhypothese irrtümlich zu verwerfen). Die Folgen eines Fehlers 1. Art sind entweder

a) Es wird davon ausgegangen, dass mehr als 25 % der Zuschauer weiblich sind, obwohl in Wirklichkeit der Anteil höchstens 25 % beträgt, d. h. der Verkaufsleiter bleibt auf größeren Mengen verderblicher Ware sitzen.

oder

b) Es wird davon ausgegangen, dass höchstens 25 % der Zuschauer weiblich sind, obwohl ihr Anteil in Wirklichkeit auf über 25 % gestiegen ist, d. h. der Verkaufsleiter hat nicht genügend Vorräte und versäumt eine Umsatzsteigerung.

Fall a) ist genau der Fehler, den der Verkaufsleiter unbedingt vermeiden will. Die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers kann er durch die Wahl der Nullhypothese $p \leq 0{,}25$ auf 5 % begrenzen.

Deswegen wird als Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}25$ gewählt. Die Alternativhypothese lautet dann H_1: $p > 0{,}25$.

(1) 2. SCHRITT: ANNAHME- UND ABLEHNUNGSBEREICH FÜR H_0 FESTLEGEN

Sei X die Anzahl der weiblichen Zuschauer auf den Fotos. X ist binomialverteilt zu den Parametern p und $n = 1000$.

H_0 soll angenommen werden, wenn höchstens k_0 weibliche Zuschauer auf den Fotos zu sehen sind.

Gesucht ist das kleinste $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k_0 \leq 1000$, so dass für jedes $p \leq 0{,}25$ $P(X > k_0) \leq 0{,}05$, also $P(X \leq k_0) \geq 0{,}95$ gewährleistet ist. Die Ungleichung $P(X \leq k_0) \geq 0{,}95$ ist genau dann für jedes $p \leq 0{,}25$ erfüllt, wenn sie für $p = 0{,}25$ gilt, denn $P(X \leq k_0)$ wird umso kleiner, je größer p wird.

Aus Tabelle 5 (kumulierte Binomialverteilung für $n = 1000$, Spalte für $p = 0{,}25$) entnimmt man $P(X \leq 272) \approx 0{,}9488$ und $P(X \leq 273) \approx 0{,}9559$. Somit ist $k_0 = 273$.

Die Entscheidungsregel lautet also wie folgt:

Die Nullhypothese $p \leq 0{,}25$ soll angenommen werden, wenn höchstens 273 weibliche Zuschauer auf den 1000 Fotos zu sehen sind. Falls mehr als 273 weibliche Zuschauer gezählt werden, soll davon ausgegangen werden, dass der Anteil der weiblichen Zuschauer auf über 25 % gestiegen ist.

(2) SCHRITT 1: DEFINITION DES FEHLERS 2. ART AUF DEN SACHVERHALT ÜBERTRAGEN

Ein Fehler 2. Art wird begangen, wenn die Nullhypothese irrtümlich angenommen wird. Im vorliegenden Fall besteht der Fehler 2. Art darin, dass man aufgrund der Stichprobe (mit höchstens 273 weiblichen Zuschauern) den Anteil der weiblichen Zuschauer auf höchstens 25 % schätzt, obwohl er tatsächlich über diesen Wert gestiegen ist. In diesem Fall würde also die Ware des Verkäufers nicht ausreichen.

(2) 2. SCHRITT: FEHLERWAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN

Gemäß der Modellierung als Bernoullikette X der Länge $n = 1000$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$ errechnet sich die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art zu

$P(X \leq 273) = F(1000; 0{,}3; 273) \approx 0{,}0329 \approx 3{,}3\ \%$.

(3) VERFAHREN ZUR ERMITTLUNG DER MAXIMALEN WAHRSCHEINLICHKEIT

Die Regel führt zu einer falschen Entscheidung, wenn die Helfer die Vermutung des Verkaufsleiters für richtig halten, das heißt, wenn mindestens 5 der 8 Helfer mehr als 33 Fotos weiblicher Zuschauer finden.

(3) 1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN, DASS EIN HELFER MEHR ALS 33 WEIBLICHE ZUSCHAUER ZÄHLT

Zunächst berechnet man die Wahrscheinlichkeit, dass ein Helfer mehr als 33 Fotos mit weiblichen Zuschauern findet, wobei die Anzahl X der weiblichen Zuschauer auf den 125 Fotos eines Helfers als binomialverteilt angenommen wird, und zwar mit den Parametern $n = 125$ und $p = 0{,}25$. Es wird nämlich $p \leq 0{,}25$ vorausgesetzt und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Helfer mehr als 33 weibliche Zuschauer zählt ist dann am größten, wenn p den Maximalwert 0,25 hat.

In diesem Fall ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Helfer mindestens 34 weibliche Zuschauer zählt, zu

$P(X \geq 34) = 1 - F(125; 0{,}25; 33)$.

Diese Wahrscheinlichkeit, die mit geeigneten technischen Hilfsmitteln, umfangreichen Nachschlagewerken oder aufwändiger Summation der Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X \geq 34) = \sum_{k=34}^{125} P(X = k) = \sum_{k=34}^{125} \binom{125}{k} \cdot 0{,}25^k \cdot 0{,}75^{125-k}$$

bestimmt werden kann, werde im Folgenden mit w bezeichnet.

(3) 2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT BESTIMMEN, DASS MINDESTENS 5 HELFER JEWEILS 34 ODER MEHR WEIBLICHE ZUSCHAUER ZÄHLEN

Wenn die acht Teilzählungen unabhängig voneinander stattfinden, so ist die Anzahl Y der Helfer, die mehr als 33 weibliche Zuschauer zählen, binomialverteilt zu den Parametern $n = 8$ und $p = w$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens fünf der acht Helfer jeweils mehr als 33 weibliche Zuschauer zählen, ist dann gegeben durch

$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y \leq 4) = 1 - F(8; w; 4)$.

Auch diese Wahrscheinlichkeit lässt sich entweder mit technischen Hilfsmitteln oder Nachschlagewerken oder direkt durch Addition der Einzelwahrscheinlichkeiten bestimmen:

$$P(Y \geq 5) = \sum_{k=5}^{8} P(Y = k) = \sum_{k=5}^{8} \binom{8}{k} \cdot w^k \cdot (1 - w)^{8-k}.$$

Die maximale Wahrscheinlichkeit, mit der die Regel der Helfer zur falschen Entscheidung führt, ist dann dieser Wert $P(Y \geq 5)$.