NOTIZEN

Abitur Mathematik: Originalprüfung

Aufgabe 5: Geometrie (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2014, LK

Die Entwicklung der Population einer bestimmten Seevogelart in einem festgelegten Beobachtungsgebiet wird durch folgende Modellannahmen beschrieben:

Die Überlebensrate der Vögel in den ersten beiden Lebensjahren wird jeweils mit 0,6 angenommen, in den späteren Lebensjahren mit 0,8. Die erste Brut findet im 3. Lebensjahr statt, der Bruterfolg wird mit 0,5 Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr angenommen. Die Vögel werden in drei Altersgruppen eingeteilt, deren Anzahlen

x_1: Anzahl der Jungvögel im 1. Lebensjahr (Altersgruppe 1)

x_2: Anzahl der Vögel im 2. Lebensjahr (Altersgruppe 2)

x_3: Anzahl der Altvögel, die älter als 2 Jahre sind (Altersgruppe 3)

durch jährliche Zählungen ermittelt und jeweils zu einer Verteilung[1] $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden. Die Matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ beschreibt dieses Modell.

a) Die aktuelle Zählung ergibt $x_1 = 2000$, $x_2 = 4000$ und $x_3 = 15000$.

(1) Berechnen Sie, ausgehend von diesen Zahlen, die Verteilung der Vögel nach einem Jahr und nach 2 Jahren. **(5 Punkte)**

(2) Bestimmen Sie die Verteilung der Vögel, die sich aus dem Modell für das Vorjahr ergäbe. **(5 Punkte)**

(3) Fünf Elemente der Matrix L haben den Wert Null. Erklären Sie für jedes dieser Elemente aus dem Sachzusammenhang heraus, warum es den Wert Null hat. **(5 Punkte)**

---

[1] Verteilungsvektoren werden der Einfachheit halber im Folgenden kurz „Verteilung“ genannt.

NOTIZEN

b) (1) Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ die Verteilung in einem beliebigen Jahr und

$L^2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}$ die Verteilung zwei Jahre danach.

Zeigen Sie: $x''_1 \geq x''_2$.

Begründen Sie nun: Schon ab dem 1. Jahr nach der aktuellen Zählung aus a)ist die Anzahl der Vögel der Altersgruppe 1 stets größer oder gleich der Anzahl der Vögel der Altersgruppe 2.

(7 Punkte)

(2) Untersuchen Sie, ob es eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene stationäre Verteilung gibt. **(5 Punkte)**

(3) Wenn sich die Population sehr lange nach dem durch die Matrix L beschriebenen Modell entwickelt, wird sie sich pro Jahr näherungsweise um einen festen Prozentsatz p verkleinern. Nach 20 Jahren wird sie noch aus insgesamt 17 870 Vögeln, nach weiteren 10 Jahren aus 15 422 Vögeln bestehen.

Berechnen Sie anhand dieser Angaben einen Näherungswert für den Prozentsatz p. **(4 Punkte)**

(4) Durch Schutzmaßnahmen könnte – bei sonst gleichbleibenden Entwicklungsbedingungen – der Bruterfolg gegenüber der bisherigen Quote von 0,5 Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr erhöht werden.

Ermitteln Sie, wie groß die Quote a des Bruterfolgs sein müsste, damit sich langfristig eine stationäre Verteilung $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einstellen würde, und berechnen Sie den Anteil jeder der 3 Altersgruppen an der Gesamtzahl der Vögel einer solchen stationären Verteilung.

[*Zur Kontrolle*: $a = \frac{5}{9}$] **(7 Punkte)**

c) Es wird vorgeschlagen, bei der Entwicklung der gegebenen Population von Seevögeln bei sonst identischen Modellannahmen vier Altersgruppen zu unterscheiden, deren Anzahlen ebenfalls bei jährlichen Zählungen ermittelt werden:

v_1: Anzahl der Jungvögel im 1. Lebensjahr (Altersgruppe 1)

v_2: Anzahl der Vögel im 2. Lebensjahr (Altersgruppe 2)

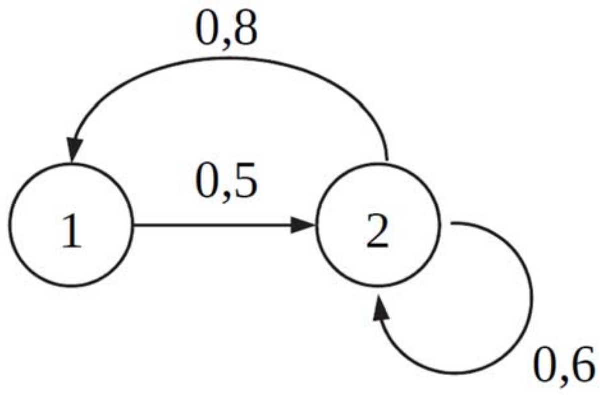
v_3: Anzahl der Vögel im 3. Lebensjahr (Altersgruppe 3)

NOTIZEN

v_4: Anzahl der Altvögel, die älter als 3 Jahre sind (Altersgruppe 4)

Geben Sie eine 4×4- Matrix L^* an, die diesem Modellierungsansatz entspricht. **(5 Punkte)**

d) Die Entwicklung einer Population einer anderen Vogelart ist durch den folgenden Übergangsgraphen gegeben, wobei sich die Übergangsquoten wieder auf ein Jahr beziehen.



(1) Geben Sie dazu eine Übergangsmatrix M an. **(3 Punkte)**

(2) Beschreiben Sie anhand des Übergangsgraphen, nach welchen Modellannahmen die Entwicklung der Population dieser anderen Vogelart im Vergleich zur bisher betrachteten Seevogelart abläuft.

(4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung