Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 5 Geometrie

Nordrhein-Westfalen 2014LK

Aufgabe 5

a)

(1) 1. SCHRITT: VERTEILUNG NACH EINEM JAHR

Die Verteilung nach einem Jahr ergibt sich durch Multiplikation der Übergangsmatrix mit der Startverteilung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot 15000 \\ 0{,}6 \cdot 2000 \\ 0{,}6 \cdot 4000 + 0{,}8 \cdot 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7500 \\ 1200 \\ 14400 \end{pmatrix}.$$

Nach einem Jahr sind also laut Modell 7500 Vögel in Altersgruppe 1, 1200 in Altersgruppe 2 und 14400 in Altersgruppe 3.

(1) 2. SCHRITT: VERTEILUNG NACH ZWEI JAHREN

Die Verteilung nach zwei Jahren ergibt sich durch Multiplikation der Übergangsmatrix mit dem Verteilungsvektor nach einem Jahr:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7500 \\ 1200 \\ 14400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot 14400 \\ 0{,}6 \cdot 7500 \\ 0{,}6 \cdot 1200 + 0{,}8 \cdot 14400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7200 \\ 4500 \\ 12240 \end{pmatrix}.$$

Nach zwei Jahren gibt es 7200 Jungvögel, 4500 Vögel im 2. Lebensjahr und 12240 Altvögel.

(2) 1. SCHRITT: VERTEILUNG DER VÖGEL BESTIMMEN

Gesucht ist der Vektor $\vec{x}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 0{,}5x_3 = 2000 \\ \text{II:} & 0{,}6x_1 = 4000 \\ \text{III:} & 0{,}6x_2 + 0{,}8x_3 = 15000 \end{array}$$

Aus I folgt $x_3 = 2000: 0{,}5 = 4000$ und aus II folgt $x_1 = 4000: 0{,}6 \approx 6667$. Setzt man den Wert für x_3 in III ein, so erhält man $x_2 = (15000 - 0{,}8 \cdot 4000): 0{,}6 = 11800: 0{,}6 \approx 19667$.

Im Vorjahr gab es also laut Modell etwa 6667 Jungvögel, etwa 19667 Vögel in der Altersgruppe 2 und 4000 Altvögel.

(3) 1. SCHRITT: WERT NULL AUS DEM SACHZUSAMMENHANG ERKLÄREN

Die erste Zeile der Matrix steht für den Übergang *in* die Altersgruppe 1. Die erste Spalte beschreibt den Übergang *von* der Altersgruppe 1. Somit bedeutet die Null in der 1. Zeile und 1. Spalte, dass der Bestand an Jungvögeln am Anfang eines Jahres keinen Einfluss auf den Bestand an Jungvögel im Folgejahr hat, d. h. keine Jungvögel bleiben nach einem Jahr in der Altersgruppe 1 und keine Jungvögel brüten neue Jungvögel aus. Das liegt daran, dass alle überlebenden Jungvögel nach einem Jahr in die Altersgruppe 2 übergehen und die Vögel erst im 3. Lebensjahr brüten können. Außerdem wird im Modell davon ausgegangen, dass keine Seevögel von außerhalb der Beobachtungszone einfliegen.

Die zweite Null in der ersten Zeile bedeutet, dass der Bestand an Vögeln der Altersgruppe 2 keinen Einfluss auf die Altersgruppe 1 im Folgejahr hat. Das liegt daran, dass die Vögel im 2. Lebensjahr weder jünger werden, noch brüten können, um neue Jungvögel für das Folgejahr hervorzubringen.

Die Null in der 2. Zeile und 2. Spalte der Matrix bedeutet, dass der Bestand an Vögeln der Altersgruppe 2 keinen Einfluss auf die Altersgruppe 2 im Folgejahr hat. Das folgt direkt aus der Definition der Altersgruppen, nachdem alle überlebenden Vögel der Altersgruppe 2 in die Altersgruppe 3 übergehen.

Die Null in der 2. Zeile und 3. Spalte gibt an, dass der Bestand an Vögeln der Altersgruppe 3 keinen Einfluss auf die Altersgruppe 2 im Folgejahr hat. Der Grund dafür ist, dass die Altvögel nur durch ihre Überlebensrate den zukünftigen Bestand der Altvögel oder durch Brüten den Bestand der Jungvögel im Folgejahr beeinflussen können, nicht aber den Bestand der Altersgruppe 2.

In der dritten Zeile und 1. Spalte zeigt die Null an, dass die Jungvögel keinen Einfluss auf den Bestand der Altvögel nach einem Jahr nehmen. Das liegt an der Definition der Altersgruppen, nach der die Vögel im Verlauf eines Jahres immer nur eine Altersgruppe weiter rücken können.

b)

(1) 1. SCHRITT: L^2 BERECHNEN

Die Übergangsmatrix für einen Zeitraum von zwei Jahren lautet

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}36 & 0{,}48 & 0{,}64 \end{pmatrix}.$$

(1) 2. SCHRITT: x_1'' UND x_2'' BERECHNEN UND VERGLEICHEN

Ausgehend vom Anfangsbestand $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich der Bestand nach zwei Jahren zu

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}36 & 0{,}48 & 0{,}64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3x_2 + 0{,}4x_3 \\ 0{,}3x_3 \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Somit ist $x_1'' - x_2'' = 0{,}3x_2 + 0{,}4x_3 - 0{,}3x_3 = 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3$. Wegen $x_2 \geq 0$ und $x_3 \geq 0$ ist $0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 \geq 0$, also $x_1'' - x_2'' \geq 0$, d. h. $x_1'' \geq x_2''$.

(1) 3. SCHRITT: BEGRÜNDUNG

Ausgehend von der Anfangsverteilung aus a) folgt aus dem letzten Ergebnis ($x_1'' \geq x_2''$), dass die Anzahl der Jungvögel nach zwei Jahren größer oder gleich der Anzahl der Vögel in Altersgruppe 2 ist. Wiederholte Anwendung desselben Arguments zeigt, dass die Ungleichung auch nach jeder anderen geraden Zahl von Jahren gilt (also nach 4, 6, 8 Jahren etc.).

Nach Teilaufgabe a) (1) ist die Verteilung nach einem Jahr gegeben durch den Vektor $\begin{pmatrix} 7500 \\ 1200 \\ 14400 \end{pmatrix}$, d. h. hier ist schon die Anzahl der Vögel der Altersgruppe 1 größer oder gleich der Anzahl der Vögel der Altersgruppe 2. Wegen der Ungleichung $x_1'' \geq x_2''$, die für jede beliebige Startverteilung gezeigt wurde, folgt die gewünschte Ungleichung für die Verteilung zwei Jahre nach dem Zustand $\begin{pmatrix} 7500 \\ 1200 \\ 14400 \end{pmatrix}$, also drei Jahre nach Beobachtungsbeginn. Durch wiederholte Anwendung desselben Arguments erhält man die gewünschte Ungleichung für alle ungeraden Jahre nach Beobachtungsbeginn.

(2) STATIONÄRE VERTEILUNG UNTERSUCHEN

Eine Verteilung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ist genau dann stationär, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(2) 1. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM AUFSTELLEN

Obige Gleichung führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I:} & 0{,}5x_3 &=& x_1 \\ \text{II:} & 0{,}6x_1 &=& x_2 \\ \text{III:} & 0{,}6x_2 + 0{,}8x_3 &=& x_3 \end{array}$$

oder vereinfacht

$$\begin{array}{lrcl} \text{I:} & -x_1 \qquad 0{,}5x_3 &=& 0 \\ \text{II:} & 0{,}6x_1 - x_2 &=& 0 \\ \text{III:} & 0{,}6x_2 - 0{,}2x_3 &=& 0. \end{array}$$

(2) 2. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM LÖSEN

I liefert $x_1 = 0{,}5x_3$, was in II eingesetzt zu $0{,}6 \cdot 0{,}5x_3 = x_2$ führt, d. h. $x_2 = 0{,}3x_3$. Dies wiederum in III eingesetzt liefert $0{,}6 \cdot 0{,}3x_3 - 0{,}2x_3 = 0$, also $-0{,}02x_3 = 0 \Longrightarrow x_3 = 0$. Somit liefert I die Beziehung $x_1 = 0$ und damit folgt aus II sofort $x_2 = 0$.

Außer der trivialen Lösung $\vec{x} = 0$ gibt es daher keine stationäre Verteilung.

(3) 1. SCHRITT: NÄHERUNGSWERT FÜR DEN PROZENTSATZ *p* BERECHNEN

Wenn sich die Population pro Jahr um einen festen Prozentsatz p verkleinert und in einem Zeitraum von 10 Jahren von 17870 auf 15422 verringert, dann gilt

$15422 = 17870 \cdot (1-p)^{10}$, also

$$p = 1 - \sqrt[10]{\frac{15422}{17870}} \approx 1 - 0{,}9854 = 0{,}0146 \approx 1{,}5\ \%.$$

Nach einer gewissen Zeit verringert sich die Population um etwa 1,5 % pro Jahr.

(4) VERTEILUNG NACH NEUER MODELLIERUNG

Eine Verteilung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ist gemäß der neuen Modellierung mit Bruterfolgsquote a genau dann stationär, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(4) 1. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM AUFSTELLEN

Obige Gleichung führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

I: $\qquad ax_3 = x_1$
II: $0{,}6x_1 \qquad = x_2$
III: $\qquad 0{,}6x_2 + 0{,}8x_3 = x_3$

oder vereinfacht

I: $-x_1 \qquad ax_3 = 0$
II: $0{,}6x_1 - x_2 \qquad = 0$
III: $\qquad 0{,}6x_2 - 0{,}2x_3 = 0.$

(4) 2. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM LÖSEN

I liefert $x_1 = ax_3$, was in II eingesetzt zu $0{,}6 \cdot ax_3 = x_2$ führt, d. h. $x_2 = 0{,}6ax_3$. Dies wiederum in III eingesetzt liefert $0{,}6 \cdot 0{,}6ax_3 - 0{,}2x_3 = 0$, also $(0{,}36a - 0{,}2)x_3 = 0$. Wenn $x_3 = 0$ ist, dann folgt analog zu Aufgabe b) (2), dass auch $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ gilt. Wenn also eine andere als die triviale stationäre Verteilung existieren soll, dann muss $x_3 \neq 0$ gewährleistet sein. Somit folgt aus $(0{,}36a - 0{,}2)x_3 = 0$ die Bedingung $0{,}36a - 0{,}2 = 0$, d. h. $a = 0{,}2 : 0{,}36 = \frac{5}{9}$.

Unter der Bedingung $a = \frac{5}{9}$ kann eine stationäre Verteilung als nicht-triviale Lösung des obigen linearen Gleichungssystems bestimmt werden: wählt man $x_3 \neq 0$ beliebig, so liefert III $0{,}6x_2 - 0{,}2 \cdot x_3 = 0$, also $x_2 = \frac{1}{3}x_3$. Außerdem erhält man aus I $-x_1 + \frac{5}{9} \cdot x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{5}{9}x_3$. Damit ergibt sich die stationäre Verteilung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9}x_3 \\ \frac{1}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(4) 3. SCHRITT: ANTEILE DER ALTERSGRUPPEN BERECHNEN

Der Anteil der Jungvögel an der Gesamtpopulation beträgt dann

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} = \frac{\frac{5}{9}x_3}{\frac{5}{9}x_3 + \frac{1}{3}x_3 + x_3} = \frac{5}{5+3+9} = \frac{5}{17},$$

der Anteil der Vögel in der Altersgruppe 2

$$\frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} = \frac{\frac{1}{3}x_3}{\frac{5}{9}x_3 + \frac{1}{3}x_3 + x_3} = \frac{3}{5+3+9} = \frac{3}{17}$$

und der Anteil der Altvögel

$$\frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3} = \frac{x_3}{\frac{5}{9}x_3 + \frac{1}{3}x_3 + x_3} = \frac{9}{5+3+9} = \frac{9}{17}.$$

c)

1.SCHRITT: MATRIX ANGEBEN

Es kommen die Übergangsraten 0,8 von Altersgruppe 3 nach 4 (durch die Überlebensquote auf Kosten des Übergangs von Altersgruppe 3 nach 3) und 0,5 von Altersgruppe 4 nach 1 (durch Bruterfolgsquote) hinzu und führen zur Übergangsmatrix

$$L^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

d)

(1) 1. SCHRITT: ÜBERGANGSMATRIX ANGEBEN

Die Übergangsmatrix lautet

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

(2) 1. SCHRITT: MODELLANNAHMEN ANHAND DES ÜBERGANGSGRAPHEN BESCHREIBEN

Hier werden nur zwei Altersgruppen unterschieden:

x_1: Anzahl der Jungvögel im ersten Lebensjahr (Altersgruppe 1)

x_2: Anzahl der Vögel ab dem zweiten Lebensjahr (Altersgruppe 2)

Man geht davon aus, dass 50 % der Jungvögel das zweite Lebensjahr erreichen, d. h. die Überlebensrate ist zunächst um 10 % geringer, als bei den zuerst betrachteten Seevögeln. Ab dem zweiten Lebensjahr beträgt die Überlebensrate 0,6 (wie auch bei den vorher betrachteten Seevögeln im 2. Lebensjahr). Die erste Brut findet im zweiten Lebensjahr statt (also ein Jahr früher als bei der anderen Vogelart), der Bruterfolg liegt bei 0,8 Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr, also deutlich höher als bei der anderen Vogelart.