Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 4 Geometrie

Nordrhein-Westfalen 2014LK

Aufgabe 4

a)

1. SCHRITT: ALLGEMEINEN PUNKT P_A DER GERADEN OD BESTIMMEN

Da O der Ursprung ist, wird kein Stützvektor gebraucht und der Ortsvektor von D kann als Richtungsvektor einer Parametergleichung von OD dienen:

$$OD: \vec{x} = \lambda \cdot \overrightarrow{OD} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein allgemeiner Punkt auf dieser Geraden hat also die Koordinaten $P_\lambda(\lambda|\lambda|0)$.

2. SCHRITT: VEKTOR $\overrightarrow{BP_\lambda}$ BESTIMMEN

Der Verbindungsvektor von B zum allgemeinen Punkt der Geraden OD ist

$$\overrightarrow{BP_\lambda} = \overrightarrow{OP_\lambda} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \sqrt{2} \\ \lambda - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. SCHRITT: SKALARPRODUKT VON VERBINDUNGSVEKTOR UND RICHTUNGSVEKTOR NULL SETZEN

Die Verbindungsstrecke $\overline{BP_\lambda}$ hat genau dann die minimale Länge, wenn $\overrightarrow{BP_\lambda}$ auf dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Geraden OD senkrecht steht. Die Bedingung dafür lautet

$$\overrightarrow{BP_\lambda} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda-\sqrt{2}\\ \lambda-1\\ 0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda-\sqrt{2}\right)\cdot 1 + (\lambda-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda - \sqrt{2} - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

4. SCHRITT: KÜRZESTEN VERBINDUNGSVEKTOR BERECHNEN

Einsetzen des Parameters $\lambda = \frac{\sqrt{2}+1}{2} = 0{,}5\left(\sqrt{2}+1\right)$ in den Verbindungsvektor $\overrightarrow{BP_\lambda}$ liefert den kürzesten Verbindungsvektor, nämlich von B zum Lotfußpunkt L:

$$\overrightarrow{BP_{0,5(\sqrt{2}+1)}} = \begin{pmatrix}0{,}5\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}\\ 0{,}5\left(\sqrt{2}+1\right)-1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\left(1-\sqrt{2}\right)\\ 0{,}5\left(\sqrt{2}-1\right)\\ 0\end{pmatrix}.$$

5. SCHRITT: LÄNGE DES KÜRZESTEN VERBINDUNGSVEKTORS BERECHNEN

Der gesuchte Abstand ist

$$d(B, OD) = \left|\overrightarrow{BP_L}\right| = \sqrt{\left(0{,}5\left(1-\sqrt{2}\right)\right)^2 + \left(0{,}5\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2 + 0^2}$$
$$= \sqrt{1{,}5-\sqrt{2}} \approx 0{,}293 \text{ [LE]}.$$

b)

(1) 1. SCHRITT: AUFPUNKT UND ZWEI RICHTUNGSVEKTOREN BESTIMMEN

Als Aufpunkt bietet sich der Punkt A an. E steht senkrecht auf der Drehachse $\overline{OD}$, also werden für die Parametergleichung zwei Richtungsvektoren (Spannvektoren) gebraucht, die senkrecht auf $\overline{OD}$ stehen. Aus Abbildung 2 erkennt man den Punkt $A'\left(0\middle|\sqrt{2}\middle|0\right)$, der in E liegt. Da $\overline{AA'}$ Punkt und Spiegelpunkt bzgl. der Drehachse verbindet, steht dieser Vektor senkrecht auf der Drehachse, liefert also einen Richtungsvektor (Spannvektor) $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$ von E. Der Einfachheit halber bevorzugen wir den Richtungsvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ als ersten Richtungsvektor. Ein zweiter ist $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, der senkrecht nach oben zeigt und somit senkrecht auf der ganzen x_1-x_2-Ebene steht, in der $\overline{OD}$ liegt.

(1) 2. SCHRITT: PARAMETERGLEICHUNG DER EBENE *E* AUFSTELLEN

Es ergibt sich aus diesen Daten die Parametergleichung

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 3. SCHRITT: NORMALENFORM DER EBENE *E* HERLEITEN

Da $A(\sqrt{2}|0|0)$ ein Punkt auf E und $\vec{n} = \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E ist, erhält man als Normalenform

$$E: \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) \circ \vec{n} = 0, \text{ also } E: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ bzw.}$$

ausmultipliziert und vereinfacht $x_1 + x_2 - \sqrt{2} = 0$.

(2) 1. SCHRITT: KOORDINATEN DES SCHNITTPUNKTES *S* BESTIMMEN

Setzt man den allgemeinen Punkt $P_\lambda(\lambda|\lambda|0)$ der Geraden OD aus Teilaufgabe a) in die Koordinatengleichung von E ein, so erhält man

$$\lambda + \lambda - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Einsetzen dieses Parameters in den allgemeinen Geradenpunkt $P_\lambda(\lambda|\lambda|0)$ liefert den Schnittpunkt

$$S\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\middle|\frac{1}{2}\sqrt{2}\middle|0\right).$$

c)

(1) 1. SCHRITT: RECHNERISCHER NACHWEIS

Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts $P_\lambda(\lambda|\lambda|0)$ in die Gleichung der Ebene E_k liefert

$$\lambda - \lambda + k \cdot 0 = 0$$

Diese Gleichung gilt für alle $k \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$, also liegt die Gerade OD in allen Ebenen der Schar E_k.

(2) 1. SCHRITT: BEGRÜNDUNG

Die Ebenen E und E_k stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihre jeweiligen Normalenvektoren senkrecht aufeinander stehen. Ein Normalenvektor für E wurde bereits bestimmt, nämlich $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ein

Normalenvektor für E_k setzt sich aus den Koeffizienten der Koordinatengleichung zusammen: $\overrightarrow{n_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$.

Es gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot k = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$, also stehen die Normalenvektoren unabhängig von k senkrecht aufeinander, d. h. die Ebene E verläuft senkrecht auf alle Ebenen E_k.

(3) 1. SCHRITT: BERECHNUNG DES PARAMETERS

In Abbildung 3 erkennt man, dass die Ebene E^* parallel zur x_3-Achse ist. Also bildet der zugehörige Normalenvektor $\overrightarrow{n_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$ mit der x_3-Achse einen rechten Winkel. Ein Richtungsvektor der x_3-Achse ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also lautet die Orthogonalitätsbedingung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + k \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow k = 0.$$

Der passende Parameter ist also $k = 0$. Für diesen gilt $E^* = E_k$.

(4) 1. SCHRITT: VEKTORGLEICHUNG FÜR $\overrightarrow{OA^*}$ AUFSTELLEN

Unter Benutzung des Punktes S aus Teilaufgabe b) (2) erhält man unter Berücksichtigung von Abbildung 3 die Gleichung

$\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA^*}$, wobei $\overrightarrow{SA^*}$ senkrecht nach oben zeigt, d. h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{SA^*} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Außerdem gilt: $|\overrightarrow{SA^*}| = |\overrightarrow{SA}|$.

(4) 2. SCHRITT: DIE LÄNGE DES VEKTORS $\overrightarrow{SA}$ BERECHNEN

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{2} \\ 0{,}5\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{2} \\ -0{,}5\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{\left(0{,}5\sqrt{2}\right)^2 + \left(-0{,}5\sqrt{2}\right)^2 + 0^2} = 1$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{SA^*}| = 1.$$

(4) 3. SCHRITT: KOORDINATEN DES PUNKTES A^* BERECHNEN

$$\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA^*} = \begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{2} \\ 0{,}5\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{2} \\ 0{,}5\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A^*\left(0{,}5\sqrt{2}\middle|0{,}5\sqrt{2}\middle|1\right)$.

d)

(1) 1. SCHRITT: VORÜBERLEGUNG

Der Punkt $A''(a_1''|a_2''|a_3'')$ erfüllt die folgenden drei Bedingungen:

1. Er liegt in der Ebene E aus Teilaufgabe b),
2. Er liegt in der Ebene $x_2 = 1$,
3. Er hat vom Punkt S denselben Abstand, wie A, nämlich 1.

(1) 2. SCHRITT: BEDINGUNGEN ALS GLEICHUNGEN SCHREIBEN UND LÖSEN

Bedingung 1 liefert mit der Ebenengleichung $x_1 + x_2 - \sqrt{2} = 0$ die Beziehung $a_1'' + a_2'' - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow a_1'' = \sqrt{2} - a_2''$.

Bedingung 2 liefert $a_2'' = 1$ und somit $a_1'' = \sqrt{2} - a_2'' = \sqrt{2} - 1$.

Bedingung 3 liefert $\left|\overrightarrow{SA''}\right| = 1$, wobei

$$\overrightarrow{SA''} = \overrightarrow{OA''} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ a_3'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{2} \\ 0{,}5\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{2}-1 \\ 1-0{,}5\sqrt{2} \\ a_3'' \end{pmatrix}.$$

Durch Quadrieren beider Seiten der grünen Gleichung und Einsetzen der Koordinaten von $\overrightarrow{SA''}$ erhält man

$$\left|\begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{2}-1 \\ 1-0{,}5\sqrt{2} \\ a_3'' \end{pmatrix}\right|^2 = \left(0{,}5\sqrt{2}-1\right)^2 + \left(1-0{,}5\sqrt{2}\right)^2 + (a_3'')^2 = 1$$

$\Rightarrow 0{,}5 - \sqrt{2} + 1 + 1 - \sqrt{2} + 0{,}5 + (a_3'')^2 = 1$

$\Rightarrow 2 - 2\sqrt{2} + (a_3'')^2 = 0$

$\Rightarrow (a_3'')^2 = 2\sqrt{2} - 2$.

In Abbildung 3 ist zu erkennen, dass A'' im ersten Oktanden liegt, also ist $a_3'' > 0$. Aus der letzten Gleichung folgt somit $a_3'' = \sqrt{2\sqrt{2}-2}$.

Damit ist $\overrightarrow{OA''} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ a_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ \sqrt{2\sqrt{2}-2} \end{pmatrix}$, d. h. $A''\left(\sqrt{2}-1|1|\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$.

(2) 1. SCHRITT: NACHWEIS DES RECHTEN WINKELS

Die Punkte C und A'' liegen in der Ebene $x_2 = 1$, somit auch die Verbindungsstrecke CA''. Die Punkte O und C liegen auf der x_2-Achse, die auf der Ebene $x_2 = 0$ senkrecht steht. Deswegen ist der Winkel OCA'' ein rechter Winkel.

(2) 2. SCHRITT: NACHWEIS, DASS DAS DREIECK GLEICHSCHENKLIG IST

Die beiden Schenkel des rechten Winkel sind die Strecken $\overline{CO}$ und $\overline{CA''}$. Ihre Längen sind

$$\left|\overrightarrow{CA''}\right| = \left|\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ \sqrt{2\sqrt{2}-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 0 \\ \sqrt{2\sqrt{2}-2} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 0^2 + 2\sqrt{2} - 2}$$

$$= 1 \text{ [LE]}$$

und

$$\left|\overrightarrow{CO}\right| = \left|-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 1.$$

Somit sind $\overline{CO}$ und $\overline{CA''}$ gleich lang, d. h. das Dreieck OCA'' ist gleichschenklig.