

Aufgabe 3: Analysis (WTR)

Abitur Mathematik: Originalprüfung

**Aufgabe 3:
Analysis (WTR)**

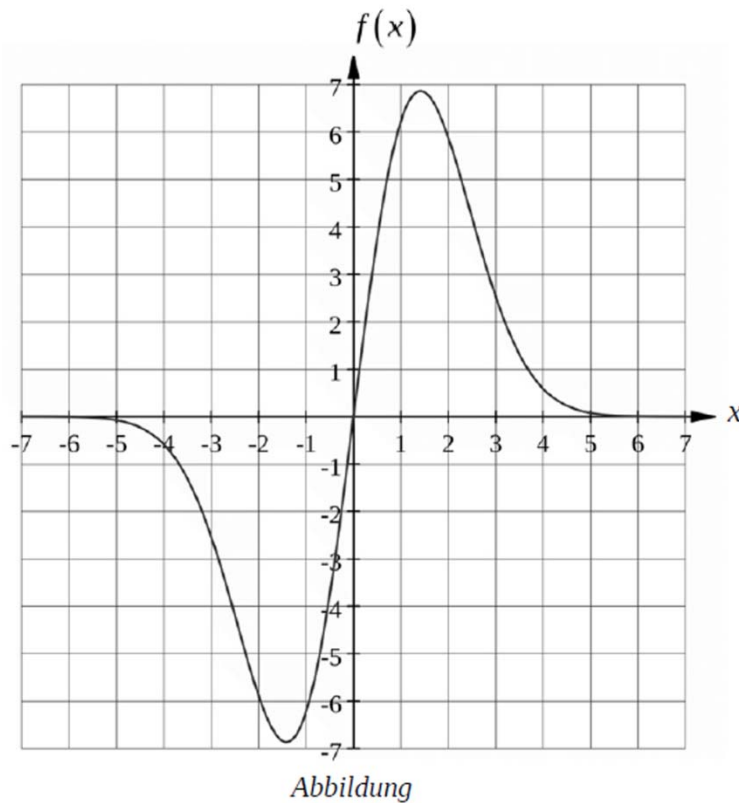
Nordrhein-Westfalen 2014, LK

NOTIZEN

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = 8x \cdot e^{-0,25x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph der Funktion f wird in der Abbildung dargestellt.



- a) (1) Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f symmetrisch zum Ursprung ist. (2 Punkte)
- (2) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen f und f' .
Untersuchen Sie, an welchen Stellen ein lokales Maximum bzw. Minimum der Funktion f vorliegt.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = (8 - 4x^2) \cdot e^{-0,25x^2}$] (8 Punkte)

Aufgabe 3: Analysis (WTR)

(3) Zeigen Sie, dass die Funktion f genau drei verschiedene Wendestellen besitzt.

[Zur Kontrolle: $f''(x) = x \cdot (2x^2 - 12) \cdot e^{-0,25x^2}$] (7 Punkte)

b) Gegeben ist die Ursprungsgerade g_m mit der Gleichung

$g_m(x) = m \cdot x, x \in \mathbb{R}$, wobei m eine positive reelle Zahl ist.

(1) Beweisen Sie: Genau für $m < 8$ schneidet die Gerade g_m den Graphen der Funktion f im I. Quadranten im Ursprung O und in einem davon verschiedenen Punkt P . (6 Punkte)

(2) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P .

[Zur Kontrolle: P besitzt die x -Koordinate $2 \cdot \sqrt{\ln \frac{8}{m}}$]

(3 Punkte)

c) (1) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit der Gleichung

$F(x) = -16 \cdot e^{-0,25x^2}, x \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion der Funktion f ist. (3 Punkte)

(2) Es sei h die Ursprungsgerade mit der Gleichung $h(x) = 4 \cdot x, x \in \mathbb{R}$. Erklären Sie, dass die Gerade h und der Graph der Funktion f im I. Quadranten eine Fläche einschließen. Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche. (9 Punkte)

d) Man betrachtet den Graphen der Funktion f . Die Punkte O und P seien wie in b) (1) definiert. Zusätzlich sei der Punkt Q die senkrechte Projektion des Punktes P auf die x -Achse.

(1) Zeigen Sie: Der Flächeninhalt des Dreiecks OQP ist

$A(m) = 2m \cdot \ln \frac{8}{m}, 0 < m < 8$. (4 Punkte)

(2) Untersuchen Sie, für welche m der Flächeninhalt des Dreiecks OQP maximal wird. (8 Punkte)

NOTIZEN

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung