Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 1, Aufgabe 3 Analysis

Nordrhein-Westfalen 2014LK

Aufgabe 3

a)

(1) 1. SCHRITT: BEGRÜNDUNG

Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = 8(-x) \cdot e^{-0{,}25(-x)^2} = -8x \cdot e^{-0{,}25x^2} = -f(x).$$

Somit ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung.

(2) 1. SCHRITT: ABLEITUNGEN BERECHNEN

Eine hinreichende Bedingung für ein relatives Maximum bzw. Minimum an der Stelle x lautet $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ bzw. $f''(x) > 0$. Dabei ist

$$f(x) = 8x \cdot e^{-0{,}25x^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8 \cdot e^{-0{,}25x^2} + 8x \cdot e^{-0{,}25x^2} \cdot (-0{,}5x) \\ &= (8 - 4x^2)e^{-0{,}25x^2} \end{aligned}$$

nach der Produktregel. Somit ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= -8x \cdot e^{-0{,}25x^2} + (8 - 4x^2) \cdot e^{-0{,}25x^2} \cdot (-0{,}5x) \\ &= (-12x + 2x^3) \cdot e^{-0{,}25x^2} \\ &= 2x(x^2 - 6) \cdot e^{-0{,}25x^2}. \end{aligned}$$

(2) 2. SCHRITT: NULLSTELLEN VON f UND f' BERECHNEN

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 8x \cdot e^{-0{,}25x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ da } e^{-0{,}25x^2} > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (8 - 4x^2)e^{-0{,}25x^2} = 0 \Leftrightarrow 8 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

(2) 3. SCHRITT: MITTELS 2. ABLEITUNG ÜBERPRÜFEN

$$f''(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot (-4) \cdot e^{-0{,}5} < 0 \Longrightarrow \text{Hochpunkt von } G_f \text{ bei } x = \sqrt{2}.$$

Aus der Symmetrie folgt, dass die Funktion bei $x = -\sqrt{2}$ einen Tiefpunkt hat.

(3) 1. SCHRITT: BEDINGUNGEN FÜR WENDEPUNKTE

Notwendige Bedingung dafür, dass x eine Wendestelle ist: $f''(x) = 0$

Krümmung: $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ ist bei x rechtsgekrümmt.

$f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ ist bei x linksgekrümmt.

(3) 2. SCHRITT: 2. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$f''(x) = 2x(x^2 - 6) \cdot e^{-0{,}25x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0$ oder $x^2 - 6 = 0$ da $e^{-0{,}25x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{6}$.

(3) 3. SCHRITT: KRÜMMUNGSVERHALTEN VON f BESTIMMEN

x	$x < -\sqrt{6}$	$-\sqrt{6} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{6}$	$x > \sqrt{6}$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Krümmung	rechts	links	rechts	links

Die Funktion f hat also genau drei Wendestellen, nämlich bei $x = -\sqrt{6}$, $x = 0$ und $x = \sqrt{6}$.

b)

Die Schnittpunkte von G_f und g_m ergeben sich durch Gleichsetzen der Funktionsterme. Neben $(0|0)$ existiert im I. Quadranten genau dann ein weiterer Schnittpunkt, wenn es einen Schnittpunkt mit positiver x-Koordinate gibt.

(1) 1. SCHRITT: FUNKTIONSTERME GLEICHSETZEN

$f(x) = g_m(x)$	Funktionsterme einsetzen
$8x \cdot e^{-0{,}25x^2} = mx$	x ausklammern
$x \cdot \left(8e^{-0{,}25x^2} - m\right) = 0$	$\vert : x$ (erlaubt, da $x > 0$)
$8e^{-0{,}25x^2} - m = 0$	$\vert + m;\ : 8$
$e^{-0{,}25x^2} = \frac{m}{8}$	logarithmieren
$-0{,}25x^2 = \ln\left(\frac{m}{8}\right)$	$\vert \cdot (-4)$
$x^2 = -4\ln\left(\frac{m}{8}\right)$	

Diese Gleichung hat genau dann eine positive Lösung, wenn die rechte Seite positiv ist. Dazu muss $\ln\left(\frac{m}{8}\right) < 0$, also $\frac{m}{8} < 1$ sein. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit $m < 8$. Für solche m gibt es also einen zweiten Schnittpunkt von G_f und g_m neben dem Ursprung, sonst nicht.

(2) 1. SCHRITT: GLEICHUNG FÜR $x > 0$ LÖSEN

Die Gleichung $\mathrm{x}^2 = -4\ln\left(\frac{m}{8}\right)$ hat für $m \in]0;8[$ die positive Lösung

$$x = \sqrt{-4\ln\left(\frac{m}{8}\right)} = 2\sqrt{\ln\left(\frac{8}{m}\right)} \text{ wegen} - \ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

(2) 2. SCHRITT: FUNKTIONSWERT AN DER SCHNITTSTELLE BERECHNEN

$$g_m\left(2\sqrt{\ln\left(\frac{8}{m}\right)}\right) = 2m \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{8}{m}\right)}$$

$$\Longrightarrow P\left(2\sqrt{\ln\left(\frac{8}{m}\right)}\middle|2m \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{8}{m}\right)}\right)$$

c)

(1) 1. SCHRITT: STAMMFUNKTION ZEIGEN

Es ist nach der Kettenregel

$$F'(x) = -16 \cdot e^{-0,25x^2} \cdot (-0,5x) = 8x \cdot e^{-0,25x^2} = f(x).$$

Also ist F eine Stammfunktion von f.

(2) 1. SCHRITT: BEGRÜNDUNG, DASS h UND f EINE FLÄCHE EINSCHLIEßEN

Die Gerade h stimmt mit der Geraden g_4 aus Teilaufgabe b) (1) überein und erfüllt die Bedingung $m = 4 < 8$. Deswegen haben h und G_f im ersten Quadranten genau zwei Schnittpunkte O und P. Da die Funktionen h und f auch beide stetig sind, schließen ihre Graphen zwischen den beiden Nullstellen eine Fläche ein.

(2) 2. SCHRITT: FLÄCHE BERECHNEN

Nach Teilaufgabe b) (1) liegen die beiden Schnittstellen von G_f und $h = g_4$ bei $x = 0$ und $x = 2\sqrt{\ln 2}$. Somit ist die eingeschlossene Fläche gegeben durch

$$A_{f,h} = \left|\int_0^{2\sqrt{\ln 2}} \big(f(x) - h(x)\big)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^{2\sqrt{\ln 2}} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{2\sqrt{\ln 2}} h(x)\mathrm{d}x\right|.$$

Da F eine Stammfunktion von f ist, folgt aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$\int_0^{2\sqrt{\ln 2}} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{2\sqrt{\ln 2}} = \left[-16 \cdot e^{-0{,}25x^2}\right]_0^{2\sqrt{\ln 2}}$$
$$= -8 - (-16) = 8,$$

ferner ist

$$\int_0^{2\sqrt{\ln 2}} h(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\sqrt{\ln 2}} 4x\mathrm{d}x = [2x^2]_0^{2\sqrt{\ln 2}} = 8\ln 2.$$

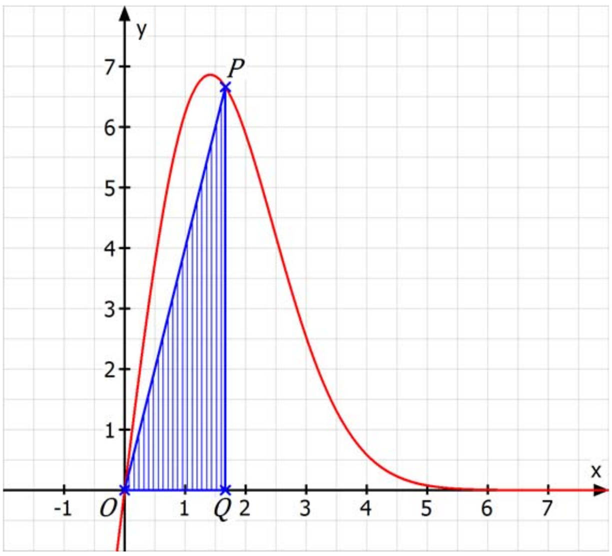
Somit folgt

$$A_{f,h} = \left| \int_0^{2\sqrt{\ln 2}} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{2\sqrt{\ln 2}} h(x)\mathrm{d}x \right| = 8 - 8\ln 2 \approx 2{,}34 \text{ [FE]}.$$

d)

(1) 1. SCHRITT: SKIZZE

Unter Benutzung der Abbildung aus der Aufgabenstellung und der Ergebnisse von Teilaufgabe b) (1) ergibt sich folgende Skizze:



(1) 2. SCHRITT: FLÄCHENINHALT HERLEITEN

Es wird $0 < m < 8$ vorausgesetzt, sonst ist P nicht definiert. Das Dreieck OPQ ist bei Q rechtwinklig. Also gilt:

$A_{OPQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OQ} \cdot \overline{QP}$ mit $\overline{OQ} = 2\sqrt{\ln\left(\frac{8}{m}\right)}$ und $\overline{QP} = 2m\sqrt{\ln\left(\frac{8}{m}\right)}$, d. h.

$$A_{OPQ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{8}{m}\right)} \cdot 2m \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{8}{m}\right)} = 2m \cdot \ln\left(\frac{8}{m}\right) = A(m).$$

(2) 1. SCHRITT: 1. UND 2. ABLEITUNG VON A NACH m BESTIMMEN

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass A bei m ein Maximum hat, lautet $A'(m) = 0$ und $A''(m) < 0$. Dabei ist

$$A(m) = 2m \cdot \ln\left(\frac{8}{m}\right)$$

$$\Rightarrow A'(m) = 2\ln\left(\frac{8}{m}\right) + 2m \cdot \frac{m}{8} \cdot \left(-\frac{8}{m^2}\right)$$

$$= 2\ln\left(\frac{8}{m}\right) - 2$$

$$\Rightarrow A''(m) = 2 \cdot \frac{m}{8} \cdot \left(-\frac{8}{m^2}\right)$$

$$= -\frac{2}{m}\,.$$

(2) 2. SCHRITT: 1. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$$2\ln\left(\frac{8}{m}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{8}{m}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{m} = e \Leftrightarrow m = \frac{8}{e} \approx 2{,}94\,.$$

(2) 3. SCHRITT: MAXIMALITÄT MITTELS 2. ABLEITUNG ÜBERPRÜFEN

$$A''\left(\frac{8}{e}\right) = -\frac{e}{4} < 0.$$

Für $m = \frac{8}{e}$ wird daher der Flächeninhalt $A(m)$ maximal.