NOTIZEN

Abitur Mathematik: Originalprüfung

Aufgabe 2: Analysis (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2014, LK

In ein Staubecken oberhalb eines Bergdorfes fließen zwei Bäche. Nach Regenfällen unterschiedlicher Dauer und Stärke können die momentanen Zuflussraten[1] aus den beiden Bächen durch Funktionen f_a für den Bach 1 und g_a für den Bach 2 und die Gesamtzuflussrate aus den beiden Bächen durch eine Funktion h_a für einen bestimmten Beobachtungszeitraum modelliert werden. Gegeben sind für $a > 0$ zunächst die Funktionsgleichungen

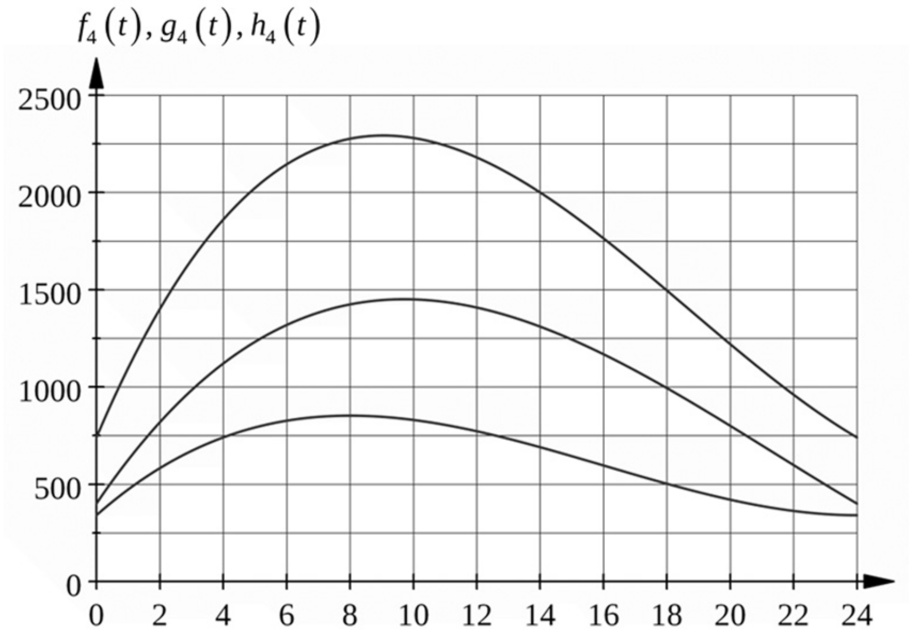
$$f_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3a \cdot t^2 + 9a^2 \cdot t + 340, t \in \mathbb{R},$$

$$h_a(t) = \frac{1}{2}t^3 - 7a \cdot t^2 + 24a^2 \cdot t + 740, t \in \mathbb{R}.$$

Dabei fasst man t als Maßzahl zur Einheit 1 h und $f_a(t), g_a(t)$ sowie $h_a(t)$ als Maßzahlen zur Einheit $1\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ auf. Der Beobachtungszeitraum beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ und endet zum Zeitpunkt $t = 6a$. Die Graphen von f_4, g_4 und h_4 sind in der Abbildung dargestellt.

[1] Im Folgenden wird zur besseren Lesbarkeit nur der Begriff Zuflussrate verwendet; darunter ist stets die momentane Zuflussrate zu verstehen.

Aufgabe 2: Analysis (WTR)



NOTIZEN

a) (1) Berechnen Sie die Gesamtzuflussrate aus den beiden Bächen zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums. **(3 Punkte)**

(2) Zeigen Sie, dass für die Funktion g_a, die die Zuflussrate aus Bach 2 beschreibt, gilt:

$g_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - 4a \cdot t^2 + 15a^2 \cdot t + 400$ **(2 Punkte)**

(3) Begründen Sie, dass unabhängig vom Parameter a $(a > 0)$ die Zuflussrate aus Bach 2 für alle $t \in [0; 6a]$ größer ist als die Zufallsrate aus Bach 1. **(8 Punkte)**

(4) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den Zeitpunkt $t_m \in [0; 6a]$, zu dem die Gesamtzuflussrate ihr Maximum annimmt.

(8 Punkte)

b) (1) Bestimmen Sie die Wendestelle der Funktion h_a. **(6 Punkte)**

(2) Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Beobachtungszeitraums, zu dem sich die Gesamtzulaufrate am stärksten ändert. **(6 Punkte)**

(3) Geben Sie nun die Bedeutung der Wendestelle aus (1) im Sachzusammenhang an. **(3 Punkte)**

c) Im Folgenden sei $a = 4$: $h_4(t) = \frac{1}{2}t^3 - 28\,t^2 + 384t + 740, t \in [0; 24]$.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ kann das Staubecken noch 20 000 m^3 Wasser aufnehmen.

Aufgabe 2: Analysis (WTR)

NOTIZEN

(1) Entscheiden Sie, ob das Staubecken das gesamte Wasser aus den beiden Bächen während der 24 Stunden des Beobachtungszeitraums aufnehmen könnte. **(4 Punkte)**

(2) Die Gleichung $\int_0^b h_4(t)dt = 20\,000$ hat die (positive) Lösung $b \approx 10{,}65$.

Geben Sie die Bedeutung dieser Lösung im Sachzusammenhang an.

(2 Punkte)

(3) Um ein Überlaufen des Staubeckens zu verhindern, wird zum Zeitpunkt $t = 10$ ein vorher verschlossener Notablauf geöffnet. Durch diesen fließt Wasser mit einer konstanten Abflussrate von $2\,000\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ aus dem Staubecken ab. Der Notablauf bleibt bis zum Ende des Beobachtungszeitraums geöffnet. Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass die Gesamtzuflussrate für $10 \leq t < 14$ größer und für $14 < t \leq 24$ kleiner als $2\,000\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ ist(vgl. Abbildung).

Untersuchen Sie, ob das Staubecken innerhalb des Beobachtungszeitraums überläuft. **(8 Punkte)**

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung