

Aufgabe 1: Analysis (WTR)

Abitur Mathematik: Originalprüfung
Aufgabe 1:
Analysis (WTR)
 Nordrhein-Westfalen 2014, LK

NOTIZEN

Ein Ölfeld wird seit Beginn des Jahres 1990 mit Bohrungen in mehreren Erdöl führenden Schichten erschlossen. Die momentane Förderrate¹ aus diesem Ölfeld im Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2009 kann im Intervall $[0; 20]$ durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = (1020 - 40t) \cdot e^{0,1-t}, t \in \mathbb{R},$$

modelliert werden.

Dabei wird t als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr und $f(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1000 Tonnen pro Jahr aufgefasst. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 1990. Der Graph von f ist in der Abbildung 1 in dem für die Modellierung zu betrachtenden Intervall dargestellt.

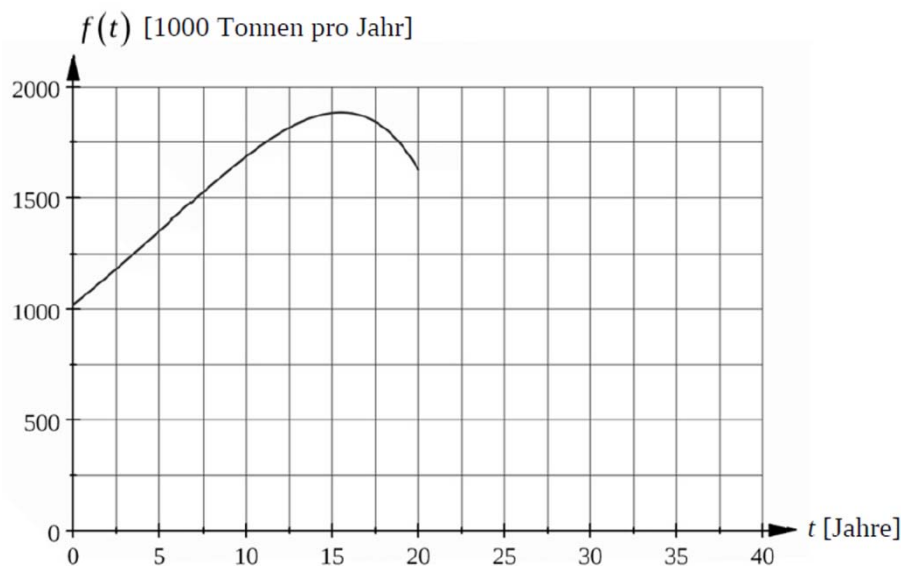


Abbildung 1

¹ Im Folgenden wird vereinfachend nur der Begriff der **Förderrate** verwendet, wobei durchgehend die **momentane Förderrate** gemeint und zu betrachten ist.

Aufgabe 1: Analysis (WTR)

a) Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt im betrachteten Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2009, zu dem die Förderrate maximal ist, und berechnen Sie den Maximalwert.

[Zur Kontrolle: $f'(t) = (62 - 4t) \cdot e^{0,1 \cdot t}$] **(11 Punkte)**

b) Die Menge des Erdöls, das seit dem Beginn der Ölförderung Anfang 1990 bis zu einem beliebigen Zeitpunkt t des betrachteten Zeitraums aus dem Ölfeld gefördert wurde, wird durch eine Funktion $M: t \mapsto M(t), 0 \leq t \leq 20$, beschrieben.

(1) Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Funktion M .

[Zur Kontrolle: Eine Stammfunktion der Funktion f ist die Funktion F mit der Gleichung $F(t) = (14200 - 400t) \cdot e^{0,1 \cdot t}$]

(8 Punkte)

(2) Berechnen Sie die gesamte Fördermenge aus dem Ölfeld von Anfang 1990 bis Ende 2009. **(3 Punkte)**

(3) Ermitteln Sie die Einnahmen aus dem Verkauf des im Jahr 2007 geförderten Erdöls, wenn man von einem Verkaufspreis von 56 Euro pro Barrel im Jahr 2007 ausgeht.

1 Barrel Erdöl (ca. 159 Liter) wiegt ca. 137 kg **(6 Punkte)**

Seit Anfang des Jahres 2010 schwächt sich der Rückgang der Förderrate ab. Diese soll im Intervall $]20; 40]$ daher durch die Funktion g mit der Gleichung

$$g(t) = 180 \cdot e^{4-0,1 \cdot t} + 40 \cdot e^2, t \in \mathbb{R},$$

modelliert werden. Dabei wird wieder t als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr und $g(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1000 Tonnen pro Jahr aufgefasst. Der Zeitpunkt $t = 20$ entspricht dem Beginn des Jahres 2010. Die Abbildung 2 stellt die Graphen der Funktionen f und g in den jeweils für die Modellierung zu betrachten Intervallen dar.

c) (1) Begründen Sie anhand des Funktionsterms von g , warum die Funktion g die Förderrate nicht über einen längeren Zeitraum sinnvoll beschreiben könnte. **(4 Punkte)**

(2) Der Betreiber kalkuliert, dass die Ölförderung für ihn nur wirtschaftlich ist, wenn innerhalb eines Kalenderjahres mindestens 600 000 Tonnen Öl gefördert werden. Bestimmen Sie das letzte Kalenderjahr, für das die Ölförderung wirtschaftlich sein wird.

[Zur Kontrolle: Die Fördermenge im Intervall $[T; T + 1], 20 < T \leq 39$, lässt sich durch $J(T) = 40 \cdot e^2 + 1800 \cdot e^{4-0,1 \cdot T} \cdot (1 - e^{-0,1})$ ermitteln] **(10 Punkte)**

NOTIZEN

Aufgabe 1: Analysis (WTR)

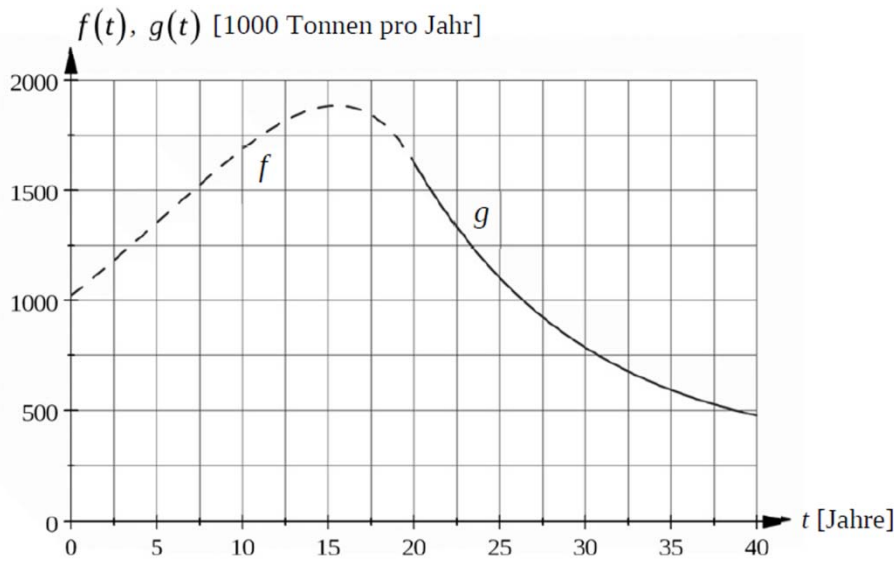


Abbildung 2

d) Durch die Funktion h mit der Gleichung

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq 20 \\ g(t), & 20 < t \leq 40 \end{cases}$$

wird die Förderrate von Anfang 1990 bis Ende 2029 beschrieben.

Folgende Angaben dürfen ohne Nachweis verwendet werden:

$f(20) = 220e^2$	$f'(20) = -18e^2$	$f''(20) = -5,8e^2$
$g(20) = 220e^2$	$g'(20) = -18e^2$	$g''(20) = 1,8e^2$

(1) Begründen Sie, dass die Funktion h an der Stelle $t = 20$ differenzierbar ist, und entscheiden Sie, ob h dort zweimal differenzierbar ist. (4 Punkte)

(2) Begründen Sie, dass h' an der Stelle $t = 20$ ein lokales Minimum besitzt.

[Hinweis: $f''(t) = (2,2 - 0,4t) \cdot e^{0,1t}$, $g''(t) = 1,8 \cdot e^{4-0,1t}$ darf ohne Nachweis verwendet werden.] (4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung