Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 1, Aufgabe 1 Analysis

Nordrhein-Westfalen 2014LK

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: $f'(t)$ UND $f''(t)$ BERECHNEN

Gesucht ist das Maximum von f auf dem Intervall $[0; 20]$. Eine hinreichende Bedingung für eine lokale Maximalstelle bei $t = x$ ist $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$.

$f(t) = (1020 - 40t) \cdot e^{0,1t}, t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f'(t) = -40 \cdot e^{0,1t} + (1020 - 40t) \cdot e^{0,1t} \cdot 0,1$$
$$= (62 - 4t) \cdot e^{0,1t}$$

$$\Rightarrow f''(t) = -4 \cdot e^{0,1t} + (62 - 4t) \cdot e^{0,1t} \cdot 0,1$$
$$= (2,2 - 0,4t) \cdot e^{0,1t}$$

2. SCHRITT: $f'(t) = 0$ SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$(62 - 4t) \cdot e^{0,1t} = 0 \Leftrightarrow 62 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 15,5$ da $e^{0,1t} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

3. SCHRITT: NULLSTELLE DER 1. ABLEITUNG AUF MAXIMALITÄT PRÜFEN

$f''(t) = (2,2 - 0,4t) \cdot e^{0,1t}$

$\Rightarrow f''(15,5) = -4 \cdot e^{1,55t} < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $t = 15,5$.

4. SCHRITT: FUNKTIONSWERT VON f BERECHNEN

$f(t) = (1020 - 40t) \cdot e^{0,1t}$

$\Rightarrow f(15,5) \approx 1884,59$

5. SCHRITT: RANDWERTE ÜBERPRÜFEN

$f(0) = 1020 < 1884,59$
$f(20) \approx 1626 < 1884,59$

Die maximale Förderrate beträgt etwa 1,88 Millionen Tonnen pro Jahr und wird Mitte des Jahres 2005 erreicht.

b)

(1) 1. SCHRITT: STAMMFUNKTION VON f BESTIMMEN

$f(t) = (1020 - 40t) \cdot e^{0,1t}$

Partielle Integration mit $u(t) = (1020 - 40t)$ und $v'(t) = e^{0,1t}$:

Eine Stammfunktion von v' ist $v(t) = \frac{1}{0,1} e^{0,1t} = 10e^{0,1t}$ nach der Regel der linearen Substitution und die Regel der partiellen Integration lautet

$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$, also

$$\int (1020 - 40t) \cdot e^{0,1t} dt = (1020 - 40t) \cdot 10e^{0,1} - \int (-40) \cdot 10e^{0,1t} dt$$

$$= (10200 - 400t) \cdot e^{0,1t} + 400 \cdot \int v'(t) dt$$

$$= (10200 - 400t) \cdot e^{0,1t} + 400 \cdot v(t) + c$$

$$= (10200 - 400t) \cdot e^{0,1t} + 4000e^{0,1t} + c$$

$$= (14200 - 400t) \cdot e^{0,1t} + c.$$

Jede Stammfunktion von f ist somit von der Form
$F(t) = (14200 - 400t) \cdot e^{0,1t} + c.$

(1) 2. SCHRITT: INTEGRATIONSKONSTANTE BESTIMMEN

$F(0) = 0 \Longrightarrow 14200 \cdot e^0 + c = 0 \Longleftrightarrow c = -14200$

$\Longrightarrow M(t) = (14200 - 400t) \cdot e^{0,1t} - 14200$

(2) 1. SCHRITT: FÖRDERMENGE BERECHNEN

Die Fördermenge seit 1990 ist durch die Funktion M gegeben.

$$M(20) = (14200 - 400 \cdot 20) \cdot e^2 - 14200$$
$$\approx 31612,148$$

Von Anfang 1990 bis Ende 2009 wurden insgesamt ca. 31,6 Millionen Tonnen Öl gefördert.

(3) 1. SCHRITT: FÖRDERMENGE IM JAHR 2007 BERECHNEN

$$M(18) - M(17) \approx 28147,53 - 26307,21$$
$$= 1840,32 \mathrel{\hat{=}} 1.840.320 \text{ t}$$

Im Jahr 2007 wurden gut 1,8 Millionen Tonnen Öl gefördert.

(3) 2. SCHRITT: TONNEN IN BARREL UMRECHNEN

1.840.320.000 kg : 137 kg/Barrel ≈ 13.432.992 Barrel

(3) 3. SCHRITT: EINNAHMEN BERECHNEN

13.432.992 Barrel · 56 €/Barrel = 752.247.552 €

Der Ölverkauf im Jahr 2007 brachte gut 752 Millionen Euro ein.

c)

(1) 1. SCHRITT: BEGRÜNDUNG

Es gilt $g(t) > 40 \cdot e^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d. h. die Förderrate wäre langfristig oberhalb von etwa 296 000 t pro Jahr, was angesichts des begrenzten Ölvorrats unrealistisch ist.

(2) 1. SCHRITT: STAMMFUNKTION VON g BESTIMMEN

$g(t) = 180 \cdot e^{4-0{,}1t} + 40 \cdot e^2$

Lineare Substitution liefert $\int 180 \cdot e^{4-0{,}1t} \mathrm{d}t = \frac{1}{-0{,}1} 180e^{4-0{,}1t}$ $= -1800e^{4-0{,}1t}$, also ist $G(t) = -1800e^{4-0{,}1t} + 40e^2 \cdot t$ eine Stammfunktion von g.

(2) 2. SCHRITT: TERM FÜR DIE FÖRDERMENGE EINES JAHRES AUFSTELLEN

$$\begin{aligned}\int_T^{T+1} g(t)\mathrm{d}t &= [-1800e^{4-0{,}1t} + 40e^2 \cdot t]_T^{T+1} \\ &= (-1800e^{3{,}9-0{,}1T} + 40e^2T + 40e^2) - 1800e^{4-0{,}1T} + 40e^2T \\ &= -1800e^{3{,}9} \cdot e^{-0{,}1T} + 1800e^4 \cdot e^{-0{,}1T} + 40e^2 \\ &= 1800(e^4 - e^{3{,}9}) \cdot e^{-0{,}1T} + 40e^2 \\ &= 1800(1 - e^{-0{,}1}) \cdot e^{4-0{,}1T} + 40e^2\end{aligned}$$

(2) 3. SCHRITT: UNGLEICHUNG LÖSEN

$$1800(e^4 - e^{3{,}9}) \cdot e^{-0{,}1T} + 40e^2 \geq 600 \qquad | - 40e^2;\ : 1800$$

$$(e^4 - e^{3{,}9}) \cdot e^{-0{,}1T} \geq \frac{600 - 40e^2}{1800} = \frac{1}{3} - \frac{e^2}{45} \qquad | : (e^4 - e^{3{,}9})$$

$$e^{-0{,}1T} \geq \frac{1}{3: (e^4 - e^{3{,}9})} - \frac{e^2}{45: (e^4 - e^{3{,}9})} \qquad | \text{ logarithmieren}$$

$$-0{,}1T \geq \ln\left(\frac{1}{3: (e^4 - e^{3{,}9})} - \frac{e^2}{45: (e^4 - e^{3{,}9})}\right) \qquad | \cdot (-10)$$

$$T \leq -10\ln\left(\frac{1}{3: (e^4 - e^{3{,}9})} - \frac{e^2}{45: (e^4 - e^{3{,}9})}\right)$$

mit $-10 \ln\left(\frac{1}{3:(e^4-e^{3{,}9})} - \frac{e^2}{45:(e^4-e^{3{,}9})}\right) \approx 34{,}25$.

$\Longrightarrow T = 34$ ist der größtmögliche Wert in $\mathbb{N}$, für den die Fördermenge zwischen $t = T$ und $t = T + 1$ oberhalb von 600.000 Tonnen liegt.

Das Jahr 2024 wird daher das letzte Kalenderjahr sein, für das sich die Ölförderung lohnt.

d)

(1) 1. SCHRITT: BEGRÜNDUNG

Die Funktionen f und g sind beide an der Stelle $t = 20$ differenzierbar und haben dort laut Tabelle denselben Ableitungswert. Somit existieren für h an der Stelle $t = 20$ rechts- und linksseitige Grenzwerte für den Differenzenquotienten und diese stimmen überein. Also existiert dort der Differentialquotient, d. h. h ist bei $t = 20$ differenzierbar.

Die Funktionen f' und g' sind beide an der Stelle $t = 20$ differenzierbar, haben aber dort laut Tabelle unterschiedliche Ableitungswerte. Somit existieren für h' rechts- und linksseitige Grenzwerte für den Differenzenquotienten, aber diese stimmen nicht überein. Also existiert dort kein Differentialquotient, d. h. h' ist bei $t = 20$ nicht differenzierbar. Somit ist also h an dieser Stelle nicht zweimal differenzierbar.

(2) 1. SCHRITT: BEGRÜNDUNG

Anhand der Funktionsterme $f''(t) = (2{,}2 - 0{,}4t) \cdot e^{0{,}1t}$ und $g''(t) = 1{,}8 \cdot e^{4-0{,}1t}$ ist zu erkennen, dass h'' in einer linksseitigen Umgebung von $t = 20$ negativ und in einer rechtsseitigen Umgebung von $t = 20$ positiv ist. Somit ist h' unmittelbar links von $t = 20$ monoton fallend und unmittelbar rechts davon monoton steigend. Somit liegt bei $t = 20$ ein relatives Minimum von h' vor.