

Aufgabe 5: Stochastik (WTR)

Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 5:**Stochastik (WTR)**

Nordrhein-Westfalen 2014 GK

NOTIZEN

Aufgabe 5

a)

(1) 1. SCHRITT: MODELLIERUNG MIT DER BERNOULLIKETTE

Wir modellieren die Situation mit einer Bernoullikette X der Länge $n = 200$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0,25$. Ein Treffer entspricht einem weiblichen Zuschauer. Aus den kumulativen Verteilungstabellen entnimmt man $F(200; 0,25; 48) \approx 0,4083$ und $F(200; 0,25; 47) \approx 0,3458$. Also ist

$$P(X = 48) = F(200; 0,25; 48) - F(200; 0,25; 47) \\ \approx 0,4083 - 0,3458 = 0,0625.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 6,25 % sind von den 200 Zuschauern 48 weiblich.

(2) 1. SCHRITT: MODELLIERUNG MIT DER BERNOULLIKETTE

Es ist

$$P(35 \leq X \leq 60) = F(200; 0,25; 60) - F(200; 0,25; 34) \\ \approx 0,9546 - 0,0044 = 0,9502$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 95 % sind von den 200 Zuschauern zwischen 35 und 60 weiblich.

(3) 1. SCHRITT: INTERVALLE BESTIMMEN

Der Erwartungswert beträgt $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,25 = 50$. Gesucht ist also $P(|X - 50| \geq 10) = P(X \geq 60) + P(X \leq 40)$.

(3) 2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN

Es ist $P(X \geq 60) = 1 - P(X \leq 59) \approx 1 - 0,9375 = 0,0625$ und $P(X \leq 40) \approx 0,0578$, also

$$P(|X - 50| \geq 10) \approx 0,0625 + 0,0578 = 0,1203.$$

Aufgabe 5: Stochastik (WTR)

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also gut 12 %.

b)

1. SCHRITT: SUMME INTERPRETIEREN

Der Term

$$\sum_{k=0}^{300} \binom{1000}{k} \cdot 0,25^k \cdot 0,75^{1000-k}$$

gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass unter 1000 zufällig ausgewählten Zuschauern höchstens 300 weiblich sind.

2. SCHRITT: GEGENWAHRSCHEINLICHKEIT INTERPRETIEREN

Der Term

$$1 - \sum_{k=0}^{300} \binom{1000}{k} \cdot 0,25^k \cdot 0,75^{1000-k}$$

gibt die Wahrscheinlichkeit für das entsprechende Gegenereignis an, beschreibt also die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 300 Zuschauer unter 1000 zufällig ausgewählten weiblich sind.

Damit lautet das gesuchte Ereignis E im vorliegenden Sachzusammenhang:

E : „Unter 1000 zufällig ausgewählten Zuschauern eines Fußballspiels sind mehr als 300 weiblich.“

c)

(1) 1. SCHRITT: ERWARTUNGSWERT UND STANDARDABWEICHUNG BERECHNEN

Der Erwartungswert für die Anzahl X der weiblichen Zuschauer beträgt $\mu = n \cdot p = 20000 \cdot 0,25 = 5000$. Gesucht ist das kleinste $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$P(5000 - k \leq X \leq 5000 + k) \geq 0,9.$$

Die Standardabweichung von X ist

$$\sigma = \sqrt{20000 \cdot 0,25 \cdot 0,75} \approx 61,24 > 3.$$

Die Laplace-Bedingung für die Anwendung der σ -Regeln ist also erfüllt.

(1) 2. SCHRITT: INTERVALLGRENZEN BERECHNEN

Nach den σ -Regeln gilt $P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 0,9$. Also ist das gesuchte k näherungsweise gegeben durch

$$1,64 \cdot \sigma \approx 1,64 \cdot 61,24 \approx 100,43.$$

Aufrundung der Obergrenze von $\mu + 1,64\sigma \approx 5100,43$ zu 5101 und Abrundung der Untergrenze von $\mu - 1,64\sigma \approx 4899,57$ zu 4899 liefert das Intervall $[4899; 5101]$.

Aufgabe 5: Stochastik (WTR)

(2) 1. SCHRITT: VORAUSSETZUNG FÜR BERNOULLI-FORMEL ÜBERPRÜFEN

Die Anwendung der Bernoulli-Formel mit Parametern $n = 50$ und $p = 0,25$ für $k = 12$ Treffer setzt voraus, dass die Anzahl der weiblichen Zuschauer in der Schlange binomialverteilt ist. Insbesondere sollte dann gewährleistet sein, dass ein Zuschauer in der Schlange unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit 0,25 weiblich ist.

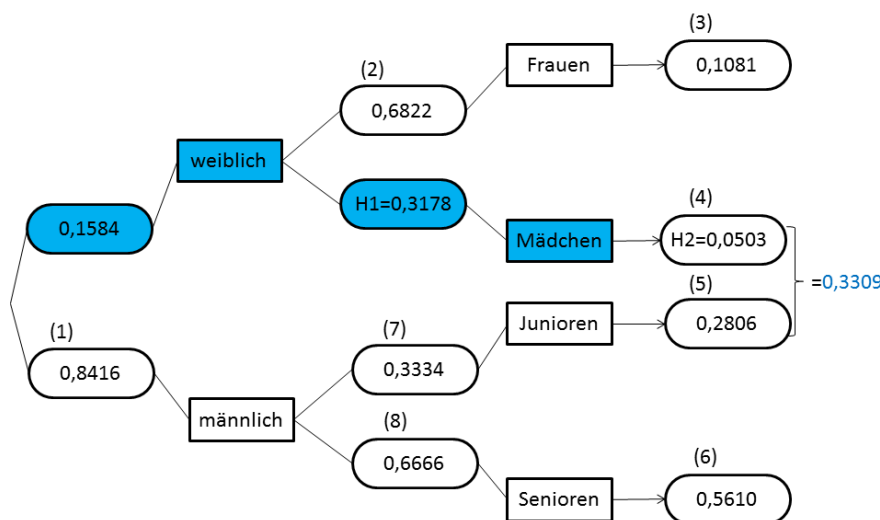
Diese Unabhängigkeitsbedingung ist für einen kleinen Stichprobenumfang eher unrealistisch, weil sich oft die Mitglieder von Fanclubs mit stark abweichender Geschlechterverteilung zusammen anstellen. Da aber derartige Gruppen selten mehr als 10 Zuschauer umfassen, kann man erwarten, dass sich dieser Effekt beim vorliegenden Stichprobenumfang von 50 Personen nahezu nivelliert.

Somit ist die angegebene Berechnungsformel für Zwecke der groben Schätzung brauchbar.

d)

(1) 1. SCHRITT: RELATIVE HÄUFIGKEITEN IM BAUMDIAGRAMM BERECHNEN

Die in der Aufgabe gegebenen Daten sind in den blau eingefärbten Knoten eingetragen.



Die fehlenden Daten der übrigen Knoten werden folgendermaßen berechnet:

- (1) = $1 - 0,1584 = 0,8416$
- (2) = $1 - 0,3178 = 0,6822$
- (3) = $0,1584 \cdot 0,6822 \approx 0,1081$
- (4) = $H2 = 0,1584 \cdot 0,3178 \approx 0,0503$
- (5) + (4) = $0,3309 \Rightarrow (5) = 0,3309 - 0,0503 = 0,2806$
- (6) = $1 - (3) - (4) - (5) = 1 - 0,1081 - 0,0503 - 0,2806 = 0,5610$

Aufgabe 5: Stochastik (WTR)

$$(7) \cdot (1) = (5) \Rightarrow (7) = \frac{0,2806}{0,8416} \approx 0,3334$$

$$(8) = 1 - 0,3334 = 0,6666$$

(2) 2. SCHRITT: RELATIVE HÄUFIGKEITEN IM SACHZUSAMMENHANG BESCHREIBEN

Beschreibung der relativen Häufigkeiten H1 und H2 in Worten:

H1: Anteil der Mädchen an den weiblichen Mitgliedern im DFB.

H2: Anteil der Mädchen an allen Mitgliedern im DFB.

(3) 1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR DIE AUSWAHL EINES JUNIORS UND EINES MÄDCHENS BERECHNEN

Wegen der großen Zahl an Mitgliedern beider Kategorien kann man näherungsweise mit dem Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ arbeiten und erhält die gewünschte Wahrscheinlichkeit als Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Kombinationen „Junior-Mädchen“ und „Mädchen-Junior“. Dabei ist laut den Berechnungen am Baumdiagramm $P(\text{Junior}) = 0,2806$ und $P(\text{Mädchen}) = 0,0503$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} P(\text{Junior-Mädchen}) + P(\text{Mädchen-Junior}) &= P(\text{Junior}) \cdot P(\text{Mädchen}) + P(\text{Mädchen}) \cdot P(\text{Junior}) \\ &\approx 0,2806 \cdot 0,0503 + 0,0503 \cdot 0,2806 \\ &\approx 0,0282 \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 2,8 %.

e)

(1) 1. SCHRITT: WAHL DER NULLHYPOTHESE BEGRÜNDEN

Mögliche Nullhypothesen sind

entweder

a) $p \leq 0,25$ („Höchstens 25 % der Zuschauer sind weiblich.“)

oder

b) $p > 0,25$ („Mehr als 25 % der Zuschauer sind weiblich.“).

Das Signifikanzniveau begrenzt die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art (die Nullhypothese irrtümlich zu verwerfen). Die Folgen eines Fehlers 1. Art sind entweder

a) Es wird davon ausgegangen, dass mehr als 25 % der Zuschauer weiblich sind, obwohl in Wirklichkeit der Anteil höchstens 25 % beträgt, d. h. der Verkaufsleiter bleibt auf größeren Mengen verderblicher Ware sitzen.

oder

b) Es wird davon ausgegangen, dass höchstens 25 % der Zuschauer weiblich sind, obwohl ihr Anteil in Wirklichkeit auf über 25 %

Aufgabe 5: Stochastik (WTR)

gestiegen ist, d. h. der Verkaufsleiter hat nicht genügend Vorräte und versäumt eine Umsatzsteigerung.

Fall a) ist genau der Fehler, den der Verkaufsleiter unbedingt vermeiden will. Die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers kann er durch die Wahl der Nullhypothese $p \leq 0,25$ auf 5 % begrenzen.

Deswegen wird als Nullhypothese $H_0: p \leq 0,25$ gewählt. Die Alternativhypothese lautet dann $H_1: p > 0,25$.

(1) 2. SCHRITT: ANNAHME- UND ABLEHNUNGSBEREICH FÜR H_0 FESTLEGEN

Sei X die Anzahl der weiblichen Zuschauer auf den Fotos. X ist binomialverteilt zu den Parametern p und $n = 1000$.

H_0 soll angenommen werden, wenn höchstens k_0 weibliche Zuschauer auf den Fotos zu sehen sind.

Gesucht ist das kleinste $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k_0 \leq 1000$, so dass für jedes $p \leq 0,25$ $P(X > k_0) \leq 0,05$, also $P(X \leq k_0) \geq 0,95$ gewährleistet ist. Die Ungleichung $P(X \leq k_0) \geq 0,95$ ist genau dann für jedes $p \leq 0,25$ erfüllt, wenn sie für $p = 0,25$ gilt, denn $P(X \leq k_0)$ wird umso kleiner, je größer p wird.

Aus Tabelle 5 (kumulierte Binomialverteilung für $n = 1000$, Spalte für $p = 0,25$) entnimmt man $P(X \leq 272) \approx 0,9488$ und $P(X \leq 273) \approx 0,9559$. Somit ist $k_0 = 273$.

Die Entscheidungsregel lautet also wie folgt:

Die Nullhypothese $p \leq 0,25$ soll angenommen werden, wenn höchstens 273 weibliche Zuschauer auf den 1000 Fotos zu sehen sind. Falls mehr als 273 weibliche Zuschauer gezählt werden, soll davon ausgegangen werden, dass der Anteil der weiblichen Zuschauer auf über 25 % gestiegen ist.

(2) 1. SCHRITT: DEFINITION DES FEHLERS 2. ART AUF DEN SACHVERHALT ÜBERTRAGEN

Ein Fehler 2. Art wird begangen, wenn die Nullhypothese irrtümlich angenommen wird. Im vorliegenden Fall besteht der Fehler 2. Art darin, dass man aufgrund der Stichprobe (mit höchstens 273 weiblichen Zuschauern) den Anteil der weiblichen Zuschauer auf höchstens 25 % schätzt, obwohl er tatsächlich über diesen Wert gestiegen ist. In diesem Fall würde also die Ware des Verkäufers nicht ausreichen.

(2) 2. SCHRITT: FEHLERWAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN

Gemäß der Modellierung als Bernoullikette X der Länge $n = 1000$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0,3$ errechnet sich die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art zu

$$P(X \leq 273) = F(1000; 0,3; 273) \approx 0,0329 \approx 3,3 \%$$