NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 4:
Geometrie (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2014 GK

Aufgabe 4

a)

(1) 1. SCHRITT: VERTEILUNG NACH EINEM JAHR

Die Verteilung nach einem Jahr ergibt sich durch Multiplikation der Übergangsmatrix mit der Startverteilung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot 15000 \\ 0{,}6 \cdot 2000 \\ 0{,}6 \cdot 4000 + 0{,}8 \cdot 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7500 \\ 1200 \\ 14400 \end{pmatrix}.$$

Nach einem Jahr sind also laut Modell 7500 Vögel in Altersgruppe 1, 1200 in Altersgruppe 2 und 14400 in Altersgruppe 3.

(1) 2. SCHRITT: VERTEILUNG NACH ZWEI JAHREN

Die Verteilung nach zwei Jahren ergibt sich durch Multiplikation der Übergangsmatrix mit dem Verteilungsvektor nach einem Jahr:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7500 \\ 1200 \\ 14400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot 14400 \\ 0{,}6 \cdot 7500 \\ 0{,}6 \cdot 1200 + 0{,}8 \cdot 14400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7200 \\ 4500 \\ 12240 \end{pmatrix}.$$

Nach zwei Jahren gibt es 7200 Jungvögel, 4500 Vögel im 2. Lebensjahr und 12240 Altvögel.

(2) 1. SCHRITT: VERTEILUNG DER VÖGEL

Gesucht ist der Vektor $\vec{x}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 0{,}5x_3 = 2000 \\ \text{II:} & 0{,}6x_1 = 4000 \\ \text{III:} & 0{,}6x_2 + 0{,}8x_3 = 15000 \end{array}$$

Aus I folgt $x_3 = 2000:0{,}5 = 4000$ und aus II folgt $x_1 = 4000:0{,}6 \approx 6667$. Setzt man den Wert für x_3 in III ein, so erhält man
$x_2 = (15000 - 0{,}8 \cdot 4000):0{,}6 = 11800:0{,}6 \approx 19667$.

Im Vorjahr gab es also laut Modell etwa 6667 Jungvögel, etwa 19667 Vögel in der Altersgruppe 2 und 4000 Altvögel.

(3) 1. SCHRITT: WERT NULL AUS DEM SACHZUSAMMENHANG ERKLÄREN

Die erste Zeile der Matrix steht für den Übergang *in* die Altersgruppe 1. Die erste Spalte beschreibt den Übergang *von* der Altersgruppe 1. Somit bedeutet die Null in der 1. Zeile und 1. Spalte, dass der Bestand an Jungvögeln am Anfang eines Jahres keinen Einfluss auf den Bestand an Jungvögel im Folgejahr hat, d. h. keine Jungvögel bleiben nach einem Jahr in der Altersgruppe 1 und keine Jungvögel brüten neue Jungvögel aus. Das liegt daran, dass alle überlebenden Jungvögel nach einem Jahr in die Altersgruppe 2 übergehen und die Vögel erst im 3. Lebensjahr brüten können. Außerdem wird im Modell davon ausgegangen, dass keine Seevögel von außerhalb der Beobachtungszone einfliegen.

Die zweite Null in der ersten Zeile bedeutet, dass der Bestand an Vögeln der Altersgruppe 2 keinen Einfluss auf die Altersgruppe 1 im Folgejahr hat. Das liegt daran, dass die Vögel im 2. Lebensjahr weder jünger werden, noch brüten können, um neue Jungvögel für das Folgejahr hervorzubringen.

Die Null in der 2. Zeile und 2. Spalte der Matrix bedeutet, dass der Bestand an Vögeln der Altersgruppe 2 keinen Einfluss auf die Altersgruppe 2 im Folgejahr hat. Das folgt direkt aus der Definition der Altersgruppen, nachdem alle überlebenden Vögel der Altersgruppe 2 in die Altersgruppe 3 übergehen.

Die Null in der 2. Zeile und 3. Spalte gibt an, dass der Bestand an Vögeln der Altersgruppe 3 keinen Einfluss auf die Altersgruppe 2 im Folgejahr hat. Der Grund dafür ist, dass die Altvögel nur durch ihre Überlebensrate den zukünftigen Bestand der Altvögel oder durch Brüten den Bestand der Jungvögel im Folgejahr beeinflussen können, nicht aber den Bestand der Altersgruppe 2.

In der dritten Zeile und 1. Spalte zeigt die Null an, dass die Jungvögel keinen Einfluss auf den Bestand der Altvögel nach einem Jahr nehmen. Das liegt an der Definition der Altersgruppen, nach der die Vögel im Verlauf eines Jahres immer nur eine Altersgruppe weiter rücken können.

b)

(1)

Eine Verteilung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ist genau dann stationär, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 1. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM AUFSTELLEN

Obige Gleichung führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcl} \text{I:} & & 0{,}5x_3 & = x_1 \\ \text{II:} & 0{,}6x_1 & & = x_2 \\ \text{III:} & & 0{,}6x_2 + 0{,}8x_3 & = x_3 \end{array}$$

oder vereinfacht

$$\begin{array}{llll} \text{I:} & -x_1 & 0{,}5x_3 & = 0 \\ \text{II:} & 0{,}6x_1 & -x_2 & = 0 \\ \text{III:} & & 0{,}6x_2 - 0{,}2x_3 & = 0. \end{array}$$

(1) 2. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM LÖSEN

I liefert $x_1 = 0{,}5x_3$, was in II eingesetzt zu $0{,}6 \cdot 0{,}5x_3 = x_2$ führt, d. h. $x_2 = 0{,}3x_3$. Dies wiederum in III eingesetzt liefert $0{,}6 \cdot 0{,}3x_3 - 0{,}2x_3 = 0$, also $-0{,}02x_3 = 0 \Longrightarrow x_3 = 0$. Somit liefert I die Beziehung $x_1 = 0$ und damit folgt aus II sofort $x_2 = 0$.

Außer der trivialen Lösung $\vec{x} = 0$ gibt es daher keine stationäre Verteilung.

(2)

Wenn sich die Population pro Jahr um einen festen Prozentsatz p verkleinert und in einem Zeitraum von 10 Jahren von 17870 auf 15422 verringert, dann gilt

$15422 = 17870 \cdot (1-p)^{10}$, also

$$p = 1 - \sqrt[10]{\frac{15422}{17870}} \approx 1 - 0{,}9854 = 0{,}0146 \approx 1{,}5\ \%.$$

Nach einer gewissen Zeit verringert sich die Population um etwa 1,5 % pro Jahr.

(2) 1. SCHRITT: HALBWERTSZEIT BESTIMMEN

Gesucht ist die Halbwertszeit T für einen vorhandenen Bestand $B > 0$, d. h. ein n, so dass gilt:

NOTIZEN

$B \cdot (1-p)^T = \frac{1}{2} \cdot B$	$\mid\ : B$
$(1-p)^T = \frac{1}{2}$	logarithmieren
$\ln((1-p)^T) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$	Logarithmus-Gesetz anwenden
$T \cdot \ln(1-p) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\mid\ : \ln(1-p)$
$T = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(1-p)}$	

Mit $p \approx 0{,}01462$ ergibt sich

$$T = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(1-p)} \approx 47{,}06$$

Damit halbiert sich nach gut 47 Jahren der Bestand.

(4) 1. SCHRITT: STATIONÄRE VERTEILUNG BEI NEUER ÜBERGANGSMATRIX

Die neue Übergangsmatrix lautet $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Zu zeigen ist, dass $n \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5n \\ 3n \\ 9n \end{pmatrix}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stationäre Verteilung ist, d. h. dass stets $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5n \\ 3n \\ 9n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5n \\ 3n \\ 9n \end{pmatrix}$ gilt.

Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5n \\ 3n \\ 9n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 5n + 0 \cdot 3n + \frac{5}{9} \cdot 9n \\ 0{,}6 \cdot 5n + 0 \cdot 3n + 0 \cdot 9n \\ 0 \cdot 5n + 0{,}6 \cdot 3n + 0{,}8 \cdot 9n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5n \\ 3n \\ 9n \end{pmatrix},$$

unabhängig von n. Also handelt es sich stets um eine stationäre Verteilung.

(5) 1. SCHRITT: PROZENTUALE ANTEILE DER ALTERSGRUPPEN AN DER POPULATION BERECHNEN

Für $n = 1$ ergibt sich die stationäre Verteilung $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$. Zu dieser Verteilung gehört die Gesamtanzahl an Vögeln von $5 + 3 + 9 = 17$.

Anteil der Jungvögel: $\frac{5}{17} \approx 29{,}4\ \%$;

Anteil der Vögel der Altersgruppe 2: $\frac{3}{17} \approx 17{,}6\ \%$;

Anteil der Altvögel: $\frac{9}{17} \approx 52{,}9\ \%$.

Wählt man einen anderen Parameter n, so hat man insgesamt $5n + 3n + 9n = 17n$ Vögel mit folgenden Anteilen:

Anteil der Jungvögel: $\frac{5n}{17n} \approx 29{,}4\ \%$;

Anteil der Vögel der Altersgruppe 2: $\frac{3n}{17n} \approx 17{,}6\ \%$;

Anteil der Altvögel: $\frac{9n}{17n} \approx 52{,}9\ \%$.

Es ergeben sich also unabhängig von n dieselben Anteile, wie für den zuerst betrachteten Fall $n = 1$.

c)

(1)

Die Übergangsmatrix lautet

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

(2)

Hier werden nur zwei Altersgruppen unterschieden:

x_1: Anzahl der Jungvögel im ersten Lebensjahr (Altersgruppe 1)

x_2: Anzahl der Vögel ab dem zweiten Lebensjahr (Altersgruppe 2)

Man geht davon aus, dass 50 % der Jungvögel das zweite Lebensjahr erreichen, d. h. die Überlebensrate ist zunächst um 10 % geringer, als bei den zuerst betrachteten Seevögeln. Ab dem zweiten Lebensjahr beträgt die Überlebensrate 0,6 (wie auch bei den vorher betrachteten Seevögeln im 2. Lebensjahr). Die erste Brut findet im zweiten Lebensjahr statt (also ein Jahr früher als bei der anderen Vogelart), der Bruterfolg liegt bei 0,8 Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr, also deutlich höher als bei der anderen Vogelart.