NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 3: Geometrie (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2014 GK

Aufgabe 3

a)

(1) 1. SCHRITT: KOORDINATEN DES MITTELPUNKTES *M* BESTIMMEN

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{OD}$ hat die Koordinaten $M\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\middle|0\right)$.

(1) 2. SCHRITT: ORTHOGONALITÄT VON *CM* UND *OD* PRÜFEN

Die Geraden CM und OD stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn die Vektoren $\overrightarrow{CM}$ und $\overrightarrow{OD}$ senkrecht aufeinander stehen, also wenn das Skalarprodukt von $\overrightarrow{CM}$ und $\overrightarrow{OD}$ null ergibt.

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CM} \circ \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0,5 \cdot 1 + (-0,5) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Die Geraden CM und OD stehen somit senkrecht aufeinander.

(1) 3. SCHRITT: ABSTAND DES PUNKTES *C* VON DER GERADEN *OD* BESTIMMEN

$\overrightarrow{CM}$ steht senkrecht auf $\overrightarrow{OD}$, also entspricht der gesuchte Abstand der Länge des Vektors $\overrightarrow{CM}$.

$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = \left|\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0,5^2 + (-0,5)^2 + 0^2} = \sqrt{0,5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ Der gesuchte Abstand beträgt $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Längeneinheiten.

b)

(1) 1. SCHRITT: AUFPUNKT UND ZWEI RICHTUNGSVEKTOREN BESTIMMEN

Als Aufpunkt bietet sich der Punkt A an. E steht senkrecht auf der Drehachse $\overline{OD}$, also werden für die Parametergleichung zwei

Richtungsvektoren (Spannvektoren) gebraucht, die senkrecht auf $\overline{OD}$ stehen. Aus Abbildung 2 erkennt man den Punkt $A'\left(0\middle|\sqrt{2}\middle|0\right)$, der in E liegt. Da $\overline{AA'}$ Punkt und Spiegelpunkt bzgl. der Drehachse verbindet, steht dieser Vektor senkrecht auf der Drehachse, liefert also einen Richtungsvektor (Spannvektor) $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ von E. Der Einfachheit halber bevorzugen wir den Richtungsvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als ersten Richtungsvektor. Ein zweiter ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, der senkrecht nach oben zeigt und somit senkrecht auf der ganzen x_1-x_2-Ebene steht, in der $\overline{OD}$ liegt.

(1) 2. SCHRITT: PARAMETERGLEICHUNG DER EBENE *E* AUFSTELLEN

Es ergibt sich aus diesen Daten die Parametergleichung

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 3. SCHRITT: NORMALENFORM DER EBENE *E* HERLEITEN

Da $A\left(\sqrt{2}|0|0\right)$ ein Punkt auf E und $\vec{n} = \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E ist, erhält man als Normalenform

$E: \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) \circ \vec{n} = 0$, also $E: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ bzw.
ausmultipliziert und vereinfacht $x_1 + x_2 - \sqrt{2} = 0$.

(2) 1. SCHRITT: KOORDINATEN DES SCHNITTPUNKTES *S* BESTIMMEN

Eine Gleichung der Geraden OD in Parameterform lautet
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ein allgemeiner Punkt dieser Geraden hat also die Koordinaten $P_\lambda(\lambda|\lambda|0)$.

Setzt man den allgemeinen Punkt $P_\lambda(\lambda|\lambda|0)$ der Geraden OD aus Teilaufgabe in die Koordinatengleichung von E ein, so erhält man

$$\lambda + \lambda - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Einsetzen dieses Parameters in den allgemeinen Geradenpunkt $P_\lambda(\lambda|\lambda|0)$ liefert den Schnittpunkt

$$S\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\middle|\frac{1}{2}\sqrt{2}\middle|0\right).$$

c)

(1) 1. SCHRITT: EBENENGLEICHUNG IN PARAMETERFORM BESTIMMEN

Die Ebene E^* wird aufgespannt von dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ der Geraden OD und dem Normalenvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ der x_1x_2-Ebene. Als Stützvektor kann der Nullvektor verwendet werden, da der Ursprung in der Ebene liegt. Somit ergibt sich die Parametergleichung

$$E^*: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

(2) 1. SCHRITT: VEKTORGLEICHUNG FÜR $\overrightarrow{OA^*}$ AUFSTELLEN

Unter Benutzung des Punktes S aus Teilaufgabe b) (2) erhält man unter Berücksichtigung von Abbildung 3 die Gleichung

$\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA^*}$, wobei $\overrightarrow{SA^*}$ senkrecht nach oben zeigt, d. h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{SA^*} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Außerdem gilt: $|\overrightarrow{SA^*}| = |\overrightarrow{SA}|$.

(2) 2. SCHRITT: DIE LÄNGE DES VEKTORS $\overrightarrow{SA}$ BERECHNEN

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0{,}5\sqrt{2}\\0{,}5\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\sqrt{2}\\-0{,}5\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{\left(0{,}5\sqrt{2}\right)^2 + \left(-0{,}5\sqrt{2}\right)^2 + 0^2} = 1$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{SA^*}| = 1.$$

(2) 3. SCHRITT: KOORDINATEN DES PUNKTES A^* BERECHNEN

$$\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA^*} = \begin{pmatrix}0{,}5\sqrt{2}\\0{,}5\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\sqrt{2}\\0{,}5\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^*\left(0{,}5\sqrt{2}\middle|0{,}5\sqrt{2}\middle|1\right).$$

NOTIZEN

d)

(1) 1. SCHRITT: NACHWEISEN, DASS *ABDS* EIN DRACHENVIERECK IST

Abbildung 3 legt nahe, dass die Seiten $\overline{AS}$ und $\overline{AB}$ gleich lang sind, ebenso die Seiten $\overline{SD}$ und $\overline{BD}$. Diese Gleichungen weisen wir rechnerisch nach, um zu zeigen, dass es sich um ein Drachenviereck handelt.

Aus der Teilaufgabe c) (2) (3. Schritt) ist bekannt, dass $|\overrightarrow{AS}| = 1$ ist. Das Viereck $OABC$ (das ganze DIN-A4-Blatt) ist ein Rechteck, also ist $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$. Somit ist die Gleichung $|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{AB}|$ nachgewiesen.

Es ist

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{SD}| &= \left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0{,}5\sqrt{2}\\0{,}5\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1-0{,}5\sqrt{2}\\1-0{,}5\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{\left(1-0{,}5\sqrt{2}\right)^2 + \left(1-0{,}5\sqrt{2}\right)^2 + 0^2} \\
&= \sqrt{2\cdot\left(1-0{,}5\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(1-0{,}5\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{2}\cdot\left|1-0{,}5\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1 \text{ und}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{BD}| &= \left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2 + 0^2 + 0^2} \\
&= \sqrt{2}-1.
\end{aligned}
$$

Damit gilt auch $|\overrightarrow{SD}| = |\overrightarrow{BD}|$. Also handelt es sich bei dem Viereck $ABDS$ um einen Drachen.

(2) 1. SCHRITT: FLÄCHENINHALT DES DRACHEN BESTIMMEN

Aus Abbildung 3 kann man erkennen, dass sich der Drachen aus zwei gleichgroßen rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzt, nämlich ABD und ADS.

Die Kathetenlängen sind aus Teilaufgabe d) (1) (1. Schritt) bekannt:

$|\overrightarrow{AS}| = 1$ und $|\overrightarrow{SD}| = \sqrt{2}-1$.

Somit ist der Flächeninhalt A des Drachen gegeben durch

$$A = 2\cdot A_{ADS} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AS}|\cdot|\overrightarrow{SD}| = \sqrt{2}-1 \text{ [FE]}.$$

NOTIZEN