NOTIZEN

Abitur Mathematik: Originalprüfung

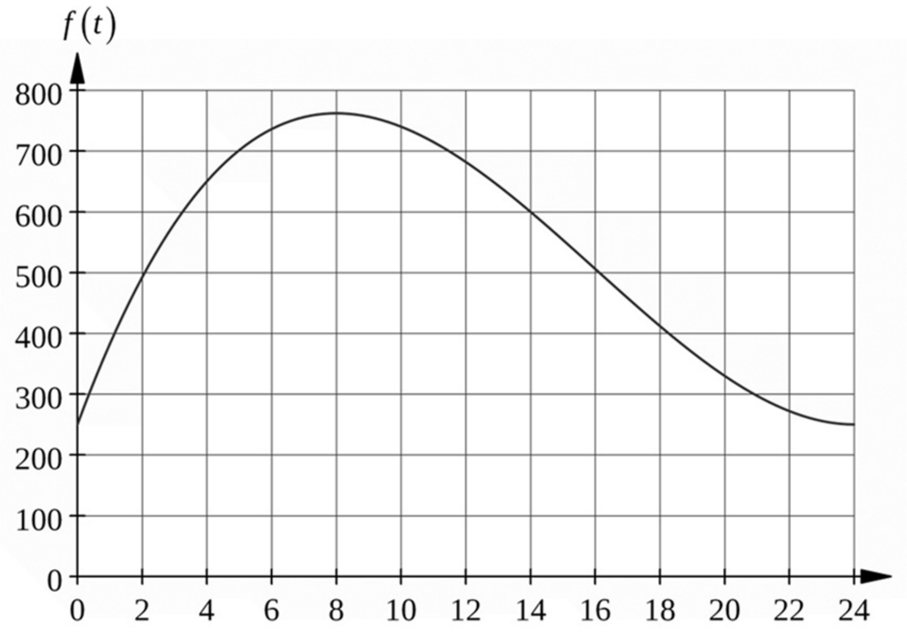
Aufgabe 2: Analysis (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2014 GK

In ein Staubecken oberhalb eines Bergdorfes fließt ein Bach. Die momentane[1] Zuflussrate aus dem Bach kann an einem Tag mit starken Regenfällen durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = \frac{1}{4}t^3 - 12t^2 + 144t + 250, t \in \mathbb{R},$$

für einen bestimmten Beobachtungszeitraum modelliert werden. Dabei fasst man t als Maßzahl zur Einheit 1 h und $f(t)$ als Maßzahl zur Einheit $1\ \mathrm{m}^3/\mathrm{h}$ auf. Der Beobachtungszeitraum beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ und endet zum Zeitpunkt $t = 24$.



a) (1) Berechnen Sie die Zuflussrate zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums. **(3 Punkte)**

[1] Im Folgenden wird zur besseren Lesbarkeit nur der Begriff Zuflussrate verwendet; darunter ist stets die momentane Zuflussrate zu verstehen.

NOTIZEN

(2) Bestimmen Sie den Zeitpunkt $t_m \in [0; 24]$, zu dem die Zuflussrate ihr Maximum annimmt, und berechnen Sie dieses Maximum.

(9 Punkte)

b) (1) Bestimmen Sie die Wendestelle des Graphen der Funktion f.

(6 Punkte)

(2) Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Beobachtungszeitraums, zu dem sich die Zuflussrate am stärksten ändert. **(6 Punkte)**

(3) Geben Sie nun die Bedeutung der Wendestelle aus (1) im Sachzusammenhang an. **(3 Punkte)**

(4) Geben Sie einen Zeitraum an, in dem die Funktion f die Zuflussrate nicht sinnvoll beschreiben könnte, und begründen Sie dies. **(4 Punkte)**

c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ kann das Staubecken noch 4500 m^3 Wasser aufnehmen.

(1) Entscheiden Sie, ob das Staubecken das gesamte Wasser aus dem Bach während der 24 Stunden des Beobachtungszeitraums aufnehmen könnte. **(5 Punkte)**

(2) Die Gleichung $\int_0^a f(t)dt = 4500$ hat die (positive) Lösung $a \approx 7{,}6$. Geben Sie die Bedeutung dieser Lösung im Sachzusammenhang an. **(3 Punkte)**

Um ein Überlaufen des Staubeckens zu verhindern, wird zum Zeitpunkt $t = 6$ ein vorher verschlossener Notablauf geöffnet. Durch diesen fließt Wasser mit einer konstanten Abflussrate von 600 m^3/h aus dem Staubecken ab. Der Notablauf bleibt bis zum Ende des Beobachtungszeitraums geöffnet. Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass die Zuflussrate für $6 \le t < 14$ größer und für $14 < t \le 24$ kleiner als 600 m^3/h ist (vgl. Abbildung).

(3) Interpretieren Sie den Ausdruck $\int_0^6 f(t)dt + \int_6^{14}(f(t) - 600)dt$ im Sachzusammenhang. Geben Sie insbesondere die Bedeutung des Zeitpunktes $t = 14$ an. **(6 Punkte)**

(4) Entscheiden Sie nun, ob das Staubecken innerhalb des Beobachtungszeitraums überläuft. **(5 Punkte)**

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung