NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 2: Analysis (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2014 GK

Aufgabe 2

a)

(1) 1. SCHRITT: ZUFLUSSRATE AM ANFANG UND AM ENDE BERECHNEN

Es gilt

$f(0) = 250$ und

$$f(24) = \frac{1}{4} \cdot 24^3 - 12 \cdot 24^2 + 144 \cdot 24 + 250 = 250.$$

Damit beträgt die Zuflussrate zu Beginn und am Ende der Beobachtungszeit jeweils $250\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$.

(2) 1. SCHRITT: ABLEITUNGEN BESTIMMEN

Gesucht ist das Maximum der Funktion f. Eine hinreichende Bedingung für ein Maximum von f an der Stelle x lautet $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$. Dabei ist

$$f(t) = \frac{1}{4} t^3 - 12t^2 + 144t + 250$$

$$\Longrightarrow f'(t) = \frac{3}{4} t^2 - 24 \cdot t + 144$$

$$\Longrightarrow f''(t) = \frac{3}{2} t - 24.$$

(2) 2. SCHRITT: NULLSTELLEN DER 1. ABLEITUNG BESTIMMEN

Die Nullstellen von f' liegen laut quadratischer Lösungsformel bei

$$t = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 144}}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{(24 \pm 12) \cdot 2}{3} = 16 \pm 8,$$

d. h. bei $t = 8$ und bei $t = 24$.

(2) 3. SCHRITT: NULLSTELLEN DER 1. ABLEITUNG AUF MAXIMALITÄT PRÜFEN

Es ist $f''(8) = \frac{3}{2} \cdot 8 - 24 = -12 < 0$ und $f''(24) = \frac{3}{2} \cdot 24 - 24 = 12 > 0$. Somit ist $t = 8$ eine Maximalstelle und $t = 24$ eine Minimalstelle von f, d. h. es ist $t_m = 8$.

(2) 4. SCHRITT: FUNKTIONSWERT AN DER MAXIMALSTELLE BERECHNEN

Es ist $f(8) = \frac{1}{4} \cdot 8^3 - 12 \cdot 8^2 + 144 \cdot 8 + 250 = 762$. Diese Zuflussrate ist größer als der Wert 250 an den Rändern der Beobachtungszeit, also handelt es sich um das globale Maximum von f. Die maximale Zuflussrate wird also 8 Stunden nach Beobachtungsbeginn erreicht und beträgt 762 m^3/h.

b)

(1) 1. SCHRITT: NULLSTELLEN DER 2. ABLEITUNG BESTIMMEN

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass x eine Wendestelle von f ist, lautet $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$. Dabei ist

$$f''(t) = \frac{3}{2}t - 24 = 0 \Leftrightarrow t = 24 \cdot \frac{2}{3} = 16.$$

(1) 2. SCHRITT: HINREICHENDE BEDINGUNG FÜR WENDESTELLE PRÜFEN

Es ist $f'''(t) = \frac{3}{2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, insbesondere also $f'''(16) = \frac{3}{2} \neq 0$. Somit ist $t = 16$ eine Wendestelle von f, und zwar die einzige.

(2) 1. SCHRITT: STÄRKSTE ÄNDERUNG DER ZUFLUSSRATE BESTIMMEN

Die Änderung der Zuflussrate wird durch die Ableitungsfunktion f' beschrieben. Gesucht ist also das Maximum des Betrags von f' auf dem Intervall $[0; 24]$. Dieses wird entweder an einer Maximalstelle oder an einer Minimalstelle von f' erreicht. Das kann nur an der Wendestelle von f oder am Rand des Modellierungsintervalls der Fall sein.

Es ist $f'(0) = \frac{3}{4} \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 + 144 = 144$ und $f'(24) = \frac{3}{4} \cdot 24^2 - 24 \cdot 24 + 144 = 0$ sowie $f'(16) = \frac{3}{4} \cdot 16^2 - 24 \cdot 16 + 144 = -48$. Somit ist wird das Maximum des Betrags von f' bei $t = 0$ erreicht.

Die stärkste Änderung der Zuflussrate ist zu Beginn der Beobachtungszeit.

(3) 1. SCHRITT: BEDEUTUNG DER WENDESTELLE

Die Wendestelle entspricht dem Zeitpunkt im Beobachtungszeitraum, zu dem sich die Zuflussrate am stärksten verringert. Der Wasserfluss in das Staubecken verlangsamt sich zu diesem Zeitpunkt am stärksten.

(4) 1. SCHRITT: INTERVALL ANGEBEN, AUF DEM f ZUR MODELLIERUNG UNGEEIGNET IST

Wie in Teilaufgabe a) (2) festgestellt, hat f bei $t = 24$ eine Minimalstelle, das ist die größere der zwei Nullstellen der quadratischen Funktion $f'(t) = \frac{3}{4}t^2 - 24 \cdot t + 144$. Wegen $\frac{3}{4} > 0$ ist $G_{f'}$ eine nach unten geöffnete Parabel, also ist für $t > 24$ $f'(t) > 0$ und somit f streng monoton wachsend. Ferner gilt

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \infty,$$

d. h. f wächst für $t > 24$ unbeschränkt an. Da die Zuflussrate aus dem Bach beschränkt bleibt und nicht bis in alle Ewigkeit zunehmen kann, eignet sich die Funktion f auf dem Intervall $[24; \infty]$ nicht für die Modellierung der Zuflussrate.

c)

(1) 1. SCHRITT: GESAMTWASSERMENGE NACH 24 STUNDEN BESTIMMEN

Gesamtwassermenge V_{gesamt} in m^3, die im Beobachtungszeitraum aus dem Bach ins Staubecken fließt:

$$\begin{aligned} V_{\text{gesamt}} &= \int_0^{24} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{24} \left(\frac{1}{4}t^3 - 12t^2 + 144t + 250\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{16}t^4 - 4t^3 + 72t^2 + 250t\right]_0^{24} \\ &= \left(\frac{1}{16}24^4 - 4 \cdot 24^3 + 72 \cdot 24^2 + 250 \cdot 24\right) - 0 \\ &= 12.912 \end{aligned}$$

Das gesamte Wasservolumen wäre $12.912\ \text{m}^3$. Damit könnte das Staubecken nicht das gesamte Wasser aufnehmen, da nach Aufgabenstellung nur noch $4500\ \text{m}^3$ in das Becken passen.

(2) 1. SCHRITT: BEDEUTUNG DER ZAHL a

Die Gleichung

$$\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = 4500 \text{ mit } a \approx 7{,}6$$

bedeutet, dass nach ca. 7,6 Stunden $4500\ \text{m}^3$ Wasser aus dem Bach in das Staubecken geflossen sind. Dies entspricht gerade der Wassermenge, die noch in das Staubecken passt, d. h. nach dieser Zeit wäre das Becken voll.

(3) 1. SCHRITT: BEDEUTUNG DES INTEGRALTERMS

Der Term

NOTIZEN

$$\underbrace{\int_0^6 f(t)\mathrm{d}t}_{\text{Integral 1}} + \underbrace{\int_6^{14} (f(t) - 600)\mathrm{d}t}_{\text{Integral 2}}$$

gibt die Wassermenge in m^3 an, die während der ersten 14 Stunden des Beobachtungszeitraumes in das Staubecken geflossen ist.

Das Integral 1 beschreibt dabei die Wassermenge im Staubecken nach den ersten 6 Stunden, vor der Öffnung der Notschleuse.

Das Integral 2 gibt die Wassermenge an, die vom Anfang der 7. bis zum Ende der 14. Stunde in das Staubecken fließt. Dabei wird berücksichtigt, dass in diesem Zeitintervall der Notablauf geöffnet ist. Damit verringert sich die Netto-Zuflussrate ab dem Zeitpunkt $t = 6$ um 600.

Es ist $f(t) > 600$ auf dem Intervall $(6; 14)$. Bis $t = 14$ ist also die Netto-Zuflussrate positiv, d. h. die Wassermenge im Staubecken nimmt zu (sofern das Becken nicht überläuft). Auf dem Intervall $(14; 24)$ ist $f(t) < 600$, also ist hier die Netto-Zuflussrate negativ, d. h. die Wassermenge im Staubecken nimmt ab.

Somit wird also zum Zeitpunkt $t = 14$ die Wassermenge im Staubecken maximal. Der Integralterm beschreibt also die maximale Wassermenge, die sich im Staubeckenim Beobachtungszeitraum $[0; 24]$ ansammelt.

(4) 1. SCHRITT: NEUE GESAMTWASSERMENGE IM STAUBECKEN

Zum Zeitpunkt $t = 14$ ist die Wassermenge $V_{14\mathrm{h}}$ im Staubecken maximal (vgl. 3. Schritt).

Zu prüfen ist, ob $V_{14\mathrm{h}} \leq 4500\ \mathrm{m}^3$ (Kapazität des Beckens) ist.

$$\begin{aligned}
V_{14\mathrm{h}} &= \int_0^6 f(t)\mathrm{d}t + \int_6^{14} (f(t) - 600)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^6 \left(\frac{1}{4}t^3 - 12t^2 + 144t + 250\right)\mathrm{d}t + \int_6^{14} \left(\frac{1}{4}t^3 - 12t^2 + 144t - 350\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{16}t^4 - 4t^3 + 72t^2 + 250t\right]_0^6 + \left[\frac{1}{16}t^4 - 4t^3 + 72t^2 - 350t\right]_6^{14} \\
&= 3309 + 928 = 4237
\end{aligned}$$

Wird der Notablauf nach 6 Stunden geöffnet, so fließen innerhalb der ersten 14 Stunden 4237 m^3 Wasser in das Staubecken. Danach nimmt die Wassermenge wieder ab und das Staubecken läuft somit innerhalb des Beobachtungszeitraums nicht über.