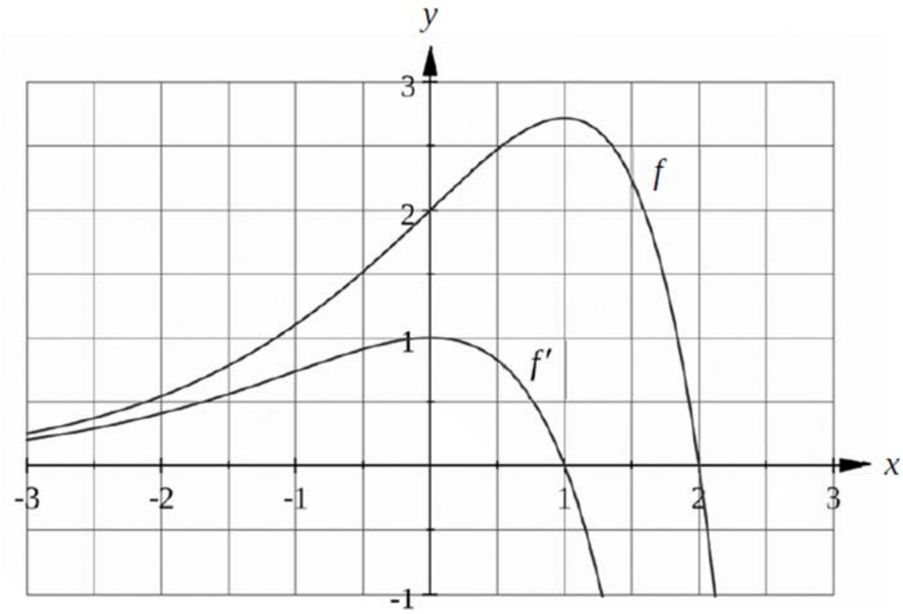
NOTIZEN

Abitur Mathematik: Originalprüfung

Aufgabe 1: Analysis (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2014 GK

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = (2 - x) \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$. Die Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f' sind in der Abbildung dargestellt.



Abbildung

a) (1) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen. **(5 Punkte)**

(2) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = (1 - x) \cdot e^x$] **(16 Punkte)**

(3) Untersuchen Sie, ob sich die Graphen der Funktionen f und f' schneiden. **(4 Punkte)**

b) (1) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = (3 - x) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. **(4 Punkte)**

(2) Ermitteln Sie für $0 \leq z \leq 2$ den Inhalt $A(z)$ der zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0; z]$ eingeschlossenen Fläche in Abhängigkeit von z.

[Zur Kontrolle: $A(z) = (3 - z) \cdot e^z - 3$] **(6 Punkte)**

c) Auf einem Erdölfeld wird Öl gefördert. Durch die Funktion f wird nun für $0 \leq x \leq 2$ die Förderrate[1] von Beginn des Jahres 2013 bis Ende des Jahres 2014 modelliert. Dabei wird x als Maßzahl der Zeit zur Einheit 1 Jahr und $f(x)$ als Maßzahl der Förderrate zur Einheit 1 Millionen Tonnen pro Jahr aufgefasst.

(1) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f im Intervall $[0; 2]$ im Sachzusammenhang. **(3 Punkte)**

(2) Bestimmen Sie die für den gesamten Zeitraum von Beginn des Jahres 2013 bis Ende des Jahres 2014 zu erwartende Fördermenge. **(4 Punkte)**

(3) Am Ende des ersten Quartals 2014 erkennt der Betreiber, dass die Förderrate von diesem Zeitpunkt an – im Gegensatz zur Modellierung durch die Funktion f – bis zum Ende der Ölförderung linear abnehmen wird. Zur Darstellung der Förderrate für die verbleibende Dauer der Ölförderung wird daher eine lineare Funktion g gesucht, deren Graph zum Zeitpunkt $x = \frac{5}{4}$ dieselbe Steigung hat wie der Graph der Funktion f.

Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Funktion g.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Ölförderung enden wird.

[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{16} e^{\frac{5}{4}} \cdot (17 - 4x)$] **(8 Punkte)**

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

NOTIZEN

[1] Unter Förderrate ist stets die momentane Förderrate zu verstehen.