NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 1: Analysis (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2014 GK

Aufgabe 1

a)

(1) 1. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE MIT DEN KOORDINATENACHSEN BESTIMMEN

Die y-Achse hat die Gleichung $x = 0$. Setzt man das im Funktionsterm von f ein, so erhält man $f(0) = (2-0) \cdot e^0 = 2$. Der Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse ist also $S_y(0|2)$.

Die x-Achse hat die Gleichung $y = 0$. Setzt man $y = f(x) = 0$, so ergibt sich folgende Bedingung für die Schnittstelle x:

$(2-x) \cdot e^x = 0$ $\quad |: e^x$ (möglich, da $e^x \neq 0$)

$2 - x = 0$ $\quad | + x$; Seiten vertauschen

$x = 2$

Der Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse ist also $N(2|0)$.

(2) 1. SCHRITT: ABLEITUNGEN VON f BESTIMMEN

Eine hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt an der Stelle x ist $f''(x)$ und $f'''(x) \neq 0$. Dabei lauten die ersten drei Ableitungen von f nach der Produktregel wie folgt:

$f(x) = (2-x) \cdot e^x$

$\Rightarrow f'(x) = (-1) \cdot e^x + (2-x) \cdot e^x = (1-x) \cdot e^x$

$\Rightarrow f''(x) = (-1) \cdot e^x + (1-x) \cdot e^x = -x \cdot e^x$

$\Rightarrow f'''(x) = (-1) \cdot e^x + (-x) \cdot e^x = -(1+x) \cdot e^x$.

(2) 2. SCHRITT: NULLSTELLEN DER 1. ABLEITUNG BESTIMMEN

Notwendige Bedingung für eine Extremstelle bei x: $f'(x) = 0$

$(1-x) \cdot e^x = 0$ $\quad |: e^x$ (möglich, da $e^x \neq 0$)

$1 - x = 0$ $\quad | + x$; Seiten vertauschen

$x = 1$

(2) 3. SCHRITT: NULLSTELLEN DER 1. ABLEITUNG AUF EXTREMALITÄT PRÜFEN

Es ist $f''(1) = -1 \cdot e^1 = -e < 0$. Daher ist die hinreichende Bedingung $f'(1) = 0$ und $f''(1) < 0$ für ein lokales Maximum an der Stelle $x = 1$ erfüllt.

(2) 4. SCHRITT: FUNKTIONSWERTE AN DEN EXTREMSTELLEN BERECHNEN

Die einzige Extremstelle ist $x = 1$ und es ist $f(1) = (2-1) \cdot e^1 = e$. Also ist der einzige Extrempunkt von G_f ein Hochpunkt mit Koordinaten $H(1|e)$.

(2) 5. SCHRITT: NULLSTELLEN DER 2. ABLEITUNG BESTIMMEN

notwendige Bedingung für eine Wendestelle bei x: $f''(x) = 0$

$-x \cdot e^x = 0 \qquad |: e^x$ (möglich, da $e^x \neq 0$)

$-x = 0 \qquad | \cdot (-1)$

$x = 0$

(2) 6. SCHRITT: HINREICHENDE BEDINGUNG FÜR WENDESTELLE PRÜFEN

Es ist $f'''(0) = -(1+0) \cdot e^0 = -1 \neq 0$, also ist die hinreichende Bedingung $f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$ für eine Wendestelle bei $x = 0$ erfüllt.

(2) 7. SCHRITT: FUNKTIONSWERTE AN DEN WENDESTELLEN BERECHNEN

Die einzige Wendestelle ist $x = 0$ und es ist $f(0) = (2-0) \cdot e^0 = 2$. Also ist der einzige Wendepunkt von G_f $W(0|2)$.

(3) 1. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE VON f UNF f' BESTIMMEN

Gleichsetzen der Funktionsterme von f und f' liefert

$(2-x) \cdot e^x = (1-x) \cdot e^x \qquad |: e^x$ (möglich, da $e^x \neq 0$)

$2 - x = 1 - x \qquad | + x$

$2 = 1$

Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine Schnittstelle der Graphen von f und f' gibt, d. h. die Graphen von f und f' schneiden sich nicht.

b)

(1) 1. SCHRITT: STAMMFUNKTION PRÜFEN

Es ist zu zeigen, dass $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dabei ist nach der Produktregel

$F(x) = (3-x) \cdot e^x$

$\Longrightarrow F'(x) = (-1) \cdot e^x + (3-x) \cdot e^x = (2-x) \cdot e^x = f(x).$

Somit ist F eine Stammfunktion von f.

(2) 1. SCHRITT: FLÄCHENINHALT $A(z)$ BESTIMMEN

Da der Graph von f im Intervall $[0; 2]$ stets oberhalb der x-Achse verläuft (siehe Abbildung), ist für $z \in [0; 2]$ der Flächeninhalt $A(z)$ gegeben durch

$$A(z) = \int_0^z f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Aufgrund des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung ist

$$\begin{aligned}\int_0^z f(x)\mathrm{d}x &= [F(x)]_0^z = [(3-x)\cdot e^x]_0^z \\ &= (3-z)\cdot e^z - \big((3-0)\cdot e^0\big) \\ &= (3-z)\cdot e^z - 3.\end{aligned}$$

Damit beträgt der Inhalt $A(z)$ der gesuchten Fläche $(3-z)\cdot e^z - 3$ Flächeneinheiten.

c)

(1) 1. SCHRITT: VERLAUF DES GRAPHEN IM SACHZUSAMMENHANG BESCHREIBEN

Zu Beginn des Beobachtungszeitraums am 1. Januar 2013 beträgt die Förderrate 2 Millionen Tonnen pro Jahr. Diese steigt streng monoton an und erreicht Ende des Jahres 2013 mit ca. 2,7 Millionen Tonnen pro Jahr ihr Maximum. Danach fällt die jährliche Förderrate streng monoton. Am Ende des Beobachtungszeitraums am 31. Dezember 2014 kommt die Förderung zum Erliegen.

(2) 1. SCHRITT: GESAMTE FÖRDERMENGE BERECHNEN

Die gesamte Fördermenge im genannten Zeitraum ergibt sich durch Integration der Förderrate von $x = 0$ bis $x = 2$. Unter Verwendung der Flächenfunktion $A(z)$ aus Teilaufgabe b (2) ergibt sich das Integral zu

$$A(2) = (3-2)\cdot e^2 - 3 = e^2 - 3 \approx 4{,}39 \text{ [FE]}.$$

Das entspricht einer Fördermenge von etwa 4,4 Millionen Tonnen Erdöl, die in den Jahren 2013 und 2014 zutage geführt wird.

(3) 1. SCHRITT: LINEARE FUNKTION g BESTIMMEN

Gesucht: lineare Funktion g, die f ab $x = \frac{5}{4} = 1{,}25$ differenzierbar fortsetzt.

Bedingungen:

1) $f\left(\frac{5}{4}\right) = g\left(\frac{5}{4}\right)$ damit sich die Förderquote nicht sprunghaft ändert;

2) $f'\left(\frac{5}{4}\right) = g'\left(\frac{5}{4}\right)$ damit die Steigungen am Übergangspunkt übereinstimmen.

G_g ist somit die Tangente an G_f im Punkte $\left(\frac{5}{4}\middle|f\left(\frac{5}{4}\right)\right)$. Anhand der Abbildung kann man erkennen, dass die gesuchte Tangente nicht senkrecht ist, also hat sich eine Gleichung der Form

$g(x) = m \cdot x + b$

für geeignete Parameter m und b aus $\mathbb{R}$. Es ist $f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(2 - \frac{5}{4}\right) \cdot e^{\frac{5}{4}} = \frac{3}{4} \cdot e^{\frac{5}{4}}$ und $f'\left(\frac{5}{4}\right) = \left(1 - \frac{5}{4}\right) \cdot e^{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{5}{4}}$. Desweiteren ist $g'(x) = m$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $f'\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{5}{4}}$ und $g'\left(\frac{5}{4}\right) = m$ in Bedingung 2) liefert

$-\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{5}{4}} = m.$

Es ist also $g(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{5}{4}} \cdot x + b$, inbesondere also
$g\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{5}{4}} \cdot \frac{5}{4} + b = -\frac{5}{16} e^{\frac{5}{4}} + b.$

Setzt man das zusammen mit $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{4} \cdot e^{\frac{5}{4}}$ in Bedingung 1) ein, so ergibt sich

$\frac{3}{4} \cdot e^{\frac{5}{4}} = -\frac{5}{16} e^{\frac{5}{4}} + b \Longrightarrow b = \frac{3}{4} \cdot e^{\frac{5}{4}} + \frac{5}{16} e^{\frac{5}{4}} = \frac{17}{16} e^{\frac{5}{4}}.$

Die vollständige Gleichung von g lautet also

$g(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{5}{4}} \cdot x + \frac{17}{16} e^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{16} e^{\frac{5}{4}}(17 - 4x).$

(3) 2. SCHRITT: ENDZEITPUNKT DER ÖLFÖRDERUNG BESTIMMEN

Die Erdölförderung endet, wenn die Förderrate gleich null ist. Gesucht ist also die Nullstelle der Funktion g.

$\frac{1}{16} \cdot e^{\frac{5}{4}}(17 - 4x) = 0$	$\mid : \left(\frac{1}{16} \cdot e^{\frac{5}{4}}\right)$
$17 - 4x = 0$	$\mid + 4x$; Seiten vertauschen
$4x = 17$	$\mid : 4$
$x = \frac{17}{4} = 4{,}25$	

Somit endet die Erdölförderung 4,25 Jahre nach Beginn der Modellierung. Dies ist am Ende des 1. Quartals des Jahres 2017 der Fall.