Bundesabitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2: Geometrie

Bayern 2014

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: VERBINDUNGSVEKTOR $\overrightarrow{CH}$ BESTIMMEN

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. SCHRITT: LÄNGE DES VEKTORS BERECHNEN

$$\left|\overrightarrow{CH}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5.$$

3. SCHRITT: BERECHNUNG DES FLÄCHENINHALTS

Wie eben berechnet beträgt eine Seitenlänge 5 m, die andere ist die Länge des Hauses, also nach Vorgabe 10 m. Die Fläche ist das Produkt der beiden Seitenlängen, also 50 m².

b)

1. SCHRITT: VRBINDUNGSVEKTOR $\overrightarrow{CD}$ BESTIMMEN

Wir brauchen den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{CH}$ und $\overrightarrow{CD}$. Nach Teilaufgabe a) ist

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt D hat die Koordinaten (0|10|5). Also ist

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. SCHRITT: WINKEL ZWISCHEN VEKTOREN

Für den Winkel φ zwischen zwei Vektoren brauchen wir die Formel

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|a| \cdot |b|}$. Wir setzen ein:

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-8)^2}} = \frac{32}{5 \cdot 8} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Nach der Skizze liegt der zu berechnende Winkel auf jeden Fall zwischen 0 und 90 °, also können wir den im Taschenrechner programmierten Zweig der Umkehrfunktion des Kosinus benutzen. Wir erhalten damit $\varphi = \cos^{-1}(0{,}8) \approx 36{,}87\,°$. Der Neigungswinkel ist somit größer als 35°, also kann die Gaube gebaut werden.

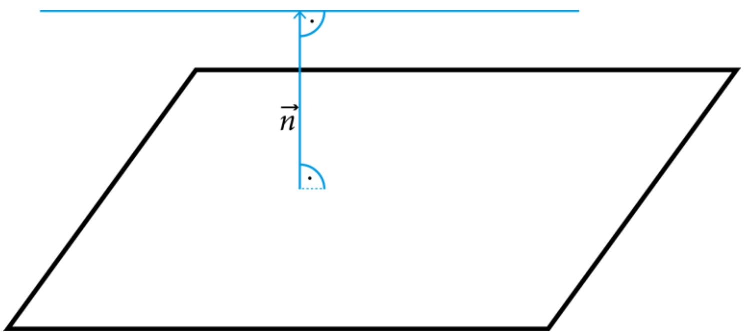
c)

1. SCHRITT: IST DIE GERADE PARALLEL ZUR EBENE?

Um zu zeigen, dass die Gerade in der Ebene liegt müssen wir zwei Dinge prüfen:

1. Die Gerade ist parallel zur Ebene, d.h. ihr Richtungsvektor steht senkrecht auf den Normalenvektor der Ebene.

2. Ein Punkt der Geraden liegt in der Ebene.



Den Normalenvektor der Ebene lesen wir aus der Ebenengleichung ab, er besteht aus den Koeffizienten vor den Koordinaten, also

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren ist nun

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 = 0 .$$

Somit stehen sie senkrecht aufeinander und Bedingung 1) ist erledigt.

2. SCHRITT: LIEGT DER AUFPUNKT DER GERADEN IN DER EBENE?

Der Aufpunkt der Geraden t ist der Punkt T, der in der Ebene liegt, da seine Koordinaten die Ebenengleichung $3x_1 + 4x_3 - 44 = 0$ erfüllen.

3. SCHRITT: ABSTAND DER BEIDEN GERADEN

Die Geraden t und CH sind parallel, denn $\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Vielfaches des Richtungsvektors von t.

Die Punkte T und H unterscheiden sich nur in der x_2-Koordinate: bei T ist sie gleich 8, bei H gleich 10. Der Abstand dieser zwei Punkte voneinander ist demnach 8. Ferner ist $[TH]$ die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen den Geraden t und CH, da sie senkrecht auf den gemeinsamen Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ steht: $\overrightarrow{TH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Bei

Berücksichtigung des Maßstabs 1 cm : 1 m erhalten wir den Abstand von 2 m.

d)

1. SCHRITT: VEKTOR $\overrightarrow{TM}$ BERECHNEN

Der Vektor $\overrightarrow{TM}$ muss so berechnet werden, dass er 1 m lang ist. Da $\overrightarrow{TM}$ parallel zu t ist, muss es sich um ein Vielfaches des entsprechenden Richtungsvektors handeln, d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\overrightarrow{TM} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda \\ 0 \\ -3\lambda \end{pmatrix}.$$

Die Länge des Vektors soll 1 betragen, also muss gelten:

$\sqrt{16\lambda^2 + 9\lambda^2} = 1 \Leftrightarrow 5|\lambda| = 1$. Außerdem muss λ positiv sein, denn sonst würde sich der Punkt M nicht auf dem Dach befinden (siehe Skizze).

Somit ist $\lambda = |\lambda| = \frac{1}{5}$ und Einsetzen in die obige Gleichung liefert

$$\overrightarrow{TM} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: ADDITION DER VEKTOREN $\overrightarrow{OT}$ UND $\overrightarrow{TM}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 8 \\ 7{,}4 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt M hat die Koordinaten (4,8|8|7,4).

e)

Da die Ebenen E und F parallel sind, haben sie den gleichen Normalenvektor. Also hat F eine Gleichung der Form:
$3x_1 + 4x_3 + d = 0$ für ein geeignetes $d \in \mathbb{R}$.

Aus dem Punkt $H(4|10|8)$ der Ebene E wird durch Verschiebung um 1,4 LE in x_3-Richtung der Punkt H^* der Ebene F, mit den Koordinaten $(4|10|9{,}4)$.

Jetzt brauchst du nur noch diese Koordinaten in F einzusetzen, um d berechnen zu können:

$3 \cdot 4 + 4 \cdot 9{,}4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -49{,}6$. Mit dieser Information können wir die vollständig bestimmte Ebenengleichung für F hinschreiben:

$F: 3x_1 + 4x_3 - 49{,}6 = 0$.

f)

1. SCHRITT: SCHNITTPUNKT GERADE – EBENE

N ist der Schnittpunkt der Geraden m mit der Ebene F.

Um den Schnittpunkt zu berechnen, setzen wir einen allgemeinen Punkt von m in die Gleichung von F ein.

Ein allgemeiner Punkt von m hat die Form $(4{,}8 + 6\mu|8|7{,}4 - \mu)$.

In F eingesetzt ergibt das
$3 \cdot (4{,}8 + 6\mu) + 4 \cdot (7{,}4 - \mu) - 49{,}6 = 0 \Leftrightarrow \mu = 0{,}4$.

Jetzt setzen wir 0,4 für μ in den allgemeinen Punkt ein und bekommen die Koordinaten von N, nämlich $N(7{,}2|8|7)$.

2. SCHRITT: KOORDINATEN VON *L* BESTIMMEN

L liegt 1,4 m senkrecht unter N. Das heißt, die x_1- und x_2-Koordinaten von L und N stimmen überein und die x_3-Koordinate von L ist um 1,4 Einheiten kleiner als die x_3-Koordinate von N. Somit ist $L(7{,}2|8|5{,}6)$.