Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 8: Stochastik (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2013

Aufgabe 8

a)

(1) WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR „KEINE ANGABE“ ERMITTELN

Nach der Laplace-Formel ist

$$P(\text{keine Angabe}) = \frac{\text{Anzahl der Personen, die keine Angabe machten}}{\text{Gesamtzahl der Befragten}}$$

Die Zahl der befragten Personen, die keine Angabe gemacht haben ist die Summe der in der Zeile „keine Angabe“ aufgelisteten Ergebnisse, also $12 + 14 + 8 + 4 + 24 = 62$. Insgesamt wurden 1005 Personen befragt. Somit ist

$$P(\text{keine Angabe}) = \frac{62}{1005} \approx 6{,}17\ \%.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person aus den 1005 Umfrageteilnehmern keine Angabe gemacht hat, beträgt etwa 6,2 %.

(2) WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR 3 PERSONEN, MINDESTENS 50 JAHRE ALT ZU SEIN UND MIT JA GEANTWORTET ZU HABEN

Für die erste Person:

$P(\geq 50; J)$ = Wahrscheinlichkeit, mindestens 50 Jahre alt zu sein und mit Ja gestimmt zu haben

$$P_1(\geq 50; J) = \frac{129 + 232}{1005} = \frac{361}{1005}$$

$$\approx 0{,}3592 = 35{,}92\ \%$$

Für die zweite Person hat sich die Gesamtzahl der Personen sowie die Anzahl derer, die die Bedingungen erfüllen, um je eins verringert (da die erste Person nicht noch einmal befragt wird):

$P_2(\geq 50; J) = \frac{360}{1004} \approx 0{,}3586 = 35{,}86\ \%$

Für die dritte Person haben sich beide Größen wiederum um eins verringert:

$P_3(\geq 50; J) = \frac{359}{1003} \approx 0{,}3579 = 35{,}79\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass 3 zufällig ausgewählte Personen mindestens 50 Jahre alt sind und mit „Ja" gestimmt haben, ist:

$P_1(\geq 50; J) \cdot P_2(\geq 50; J) \cdot P_3(\geq 50; J)$

$= \frac{361}{1005} \cdot \frac{360}{1004} \cdot \frac{359}{1003} = 0{,}0461 \approx 4{,}6\ \%$

Bemerkung:

Da es nur um 3 von 1005 Personen geht, kann näherungsweise von „Ziehen mit Zurücklegen" ausgegangen werden. Es ergibt sich damit die Wahrscheinlichkeit $\left(P_1(\geq 50; J)\right)^3 \approx 0{,}0463$, was auf drei Nachkommastellen gerundet mit vorigen Ergebnis übereinstimmt.

(3) ANTEIL NICHT-SCHÜLER MIT ANGABE „JA" ERMITTELN

Die Aufgabenstellung ist zweideutig, je nachdem, ob der Nebensatz die Grundgesamtheit einschränkt, oder sich nur auf den zu ermittelnden Anteil bezieht.

1. Interpretation:

„Bestimmen Sie unter den 14- bis 29-Jährigen, die mit „Ja" geantwortet haben, den Anteil der Nicht-Schüler."

2. Interpretation:

„Bestimmen Sie unter allen 14- bis 29-Jährigen den Anteil der Nicht-Schüler, die mit „Ja" geantwortet haben."

Zwei Drittel der 57 Schüler haben mit „Ja" gestimmt, das sind 38 Schüler. Insgesamt haben 166 Personen der Altersklasse 14-29 Jahre mit „Ja" gestimmt, darunter waren demnach $166 - 38 = 128$ Nicht-Schüler.

1. Interpretation:

Die Grundgesamtheit ist hier die Menge aller 14- bis 29-jährigen, die mit „Ja" gestimmt haben, also laut Tabelle 166 Personen. Hier ist der zu berechnende Anteil:

$\frac{128}{166} \approx 77{,}1\ \%.$

2. Interpretation:

Hier ist die Grundgesamtheit die Menge aller befragten 14- bis 29-jährigen, also laut Tabelle 211 Personen. In diesem Fall ist der zu berechnende Anteil:

$$\frac{128}{211} \approx 60{,}7\ \%.$$

b)

(1) GLEICHUNG BEGRÜNDEN

Altersgruppe 14–29:

Gesamtzahl der Personen: 211

SCHÜLER

Anzahl der Schüler: x

Anteil der Ja-Stimmen unter den Schülern: $\frac{2}{3}$

Anzahl der Ja-Stimmen unter den Schülern:

Anteil der Ja-Stimmen unter den Schülern mal Anzahl Schüler

$$= \frac{2}{3} \cdot x$$

NICHT-SCHÜLER

Anzahl der Nicht-Schüler: $211 - x$

Anteil der Ja-Stimmen unter den Nicht-Schülern: r

Anzahl Ja-Stimmen unter den Nicht-Schülern:

Anteil Ja-Stimmen unter den Nicht-Schülern mal Anzahl Nicht-Schüler

$$= r \cdot (211 - x)$$

GLEICHUNG AUFSTELLEN

Gesamtzahl Ja-Stimmen: 166

= Anzahl Ja-Stimmen unter den Schülern plus Anzahl Ja-Stimmen unter den Nicht-Schülern

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot x + r \cdot (211 - x) = 166$$

(2) ANZAHL DER SCHÜLER ERMITTELN

$$\frac{2}{3} \cdot x + r \cdot (211 - x) = 166$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot x + 211 \cdot r - r \cdot x = 166$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{2}{3} - r\right) = 166 - 211r$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{166 - 211r}{\frac{2}{3} - r} \approx \frac{166 - 211 \cdot 0{,}831}{\frac{2}{3} - 0{,}831} \approx 56{,}84$$

Die Anzahl Schüler unter den 14- bis 29-Jährigen beträgt etwa 57, in Übereinstimmung mit der Aufgabenstellung a)(3).

c)

(1) BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR HERKUNFT WESTDEUTSCHLAND ERMITTELN

Bezeichnungen:

J = der Befragte stimmt mit „Ja"
$\bar{J}$ = der Befragte stimmt nicht mit „Ja"
W = der Befragte stammt aus Westdeutschland
O = der Befragte stammt aus Ostdeutschland

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses W unter der Bedingung J, also

$$P_J(W) = \frac{P(W \cap J)}{P(J)}$$

Dabei ist:

$$P(W \cap J) = \frac{\text{Anzahl der Westdeutschen, die mit "Ja" gestimmt haben}}{\text{Gesamtzahl der Teilnehmer}}$$
$$= \frac{643}{1005}$$

und:

$$P(J) = \frac{\text{Anzahl der Befragten, die mit "Ja" gestimmt haben}}{\text{Gesamtzahl der Teilnehmer}}$$
$$= \frac{792}{1005},$$

also:

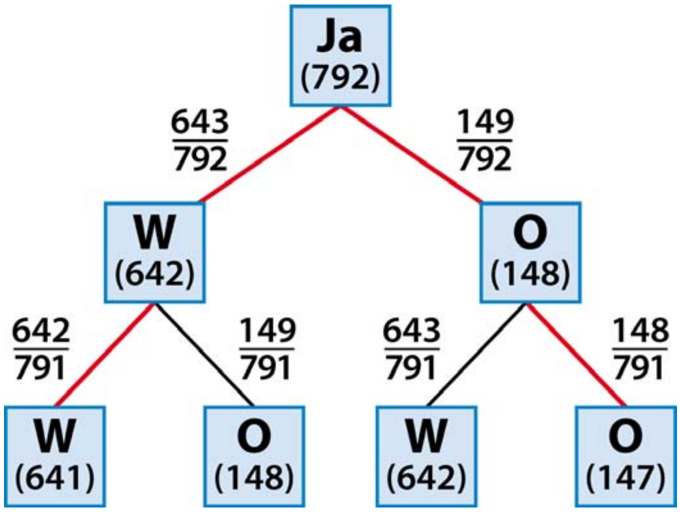
$$P_J(W) = \frac{\frac{643}{1005}}{\frac{792}{1005}} = \frac{643}{792} \approx 81{,}2\ \%.$$

(2) WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR ZWEI JA-STIMMEN AUS DEMSELBEN LANDESTEIL ERMITTELN

Aus den 792 Personen, die mit „Ja" gestimmt haben, wird zweimal ohne Zurücklegen gezogen. Bei der ersten Ziehung wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{643}{792}$ ein Westdeutscher und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{149}{792}$ ein Ostdeutscher gewählt. Bei der zweiten Ziehung stehen nur noch 791 Personen zur Auswahl, davon entweder 643 oder 642 aus

Westdeutschland, je nach Herkunft des ersten Befragten bzw. 149 oder 148 aus Ostdeutschland.

Baumdiagramm:



Die rot gekennzeichneten Pfade sind diejenigen, die zum Ereignis „Die zweite Person stammt aus demselben Teil Deutschlands wie die erste“ beitragen. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist nach der 2. Pfadregel:

$P(W \cap W) + P(O \cap O) = P(W) \cdot P_W(W) + P(O) \cdot P_O(O)$

$= \frac{643}{792} \cdot \frac{642}{791} + \frac{149}{792} \cdot \frac{148}{791}$

$\approx 0{,}659 + 0{,}035 = 0{,}694$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide zufällig ausgewählten Personen aus derselben Region stammen, wenn beide mit „Ja“ gestimmt haben, beträgt etwa 69,4 %.

d)

(1) BINOMIALVERTEILUNG BEGRÜNDEN

Voraussetzungen für eine Binomialverteilung:

- Die n befragten Personen antworten unabhängig voneinander.
- Es werden jeweils nur zwei Antworten unterschieden: „Nein“ oder „nicht Nein“ (d. h., die Antwortmöglichkeiten „Ja“ und „keine Angabe“ werden zusammengefasst).
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilnehmer mit „Nein“ antwortet, bleibt bei allen n Befragungen gleich.

Unter diesen drei Bedingungen würde es sich um n unabhängige Durchführungen desselben Bernoulli-Experiments handeln, damit wäre die Anzahl der Treffer binomialverteilt.

Im vorliegenden Fall wird die Antwort „Nein“ als Treffer angesehen. Die ersten zwei Bedingungen können ohne weiteres als erfüllt angenommen werden.

Die dritte Bedingung ist streng genommen nicht erfüllt, da dieselbe Person nicht mehrfach befragt wird, d. h., das passende Modell wäre „Ziehen ohne Zurücklegen“ (mit Beachtung der Reihenfolge), während die Binomialverteilung von „Ziehen mit Zurücklegen“ ausgeht. Sofern aber n sehr viel kleiner ist als die Anzahl der befragten 50- bis 59-Jährigen, ändert sich die Trefferwahrscheinlichkeit p nur geringfügig:

$$p = \frac{\#\mathrm{N}}{\#\mathrm{G}},$$

wobei #N die Anzahl der noch zur Auswahl stehenden (also noch nicht befragten) 50- bis 59-Jährigen ist, die mit „Nein“ stimmen, und #G die Gesamtzahl der noch nicht befragten 50- bis 59-Jährigen. Es ist bei n Befragungen:

$$0 \leq \#\mathrm{N} \leq 19 \text{ und } 152 - n \leq \#\mathrm{G} \leq 152.$$

Somit gilt z. B. für $n \leq 19$:

$$0 \leq \frac{19 - n}{152} \leq p \leq \frac{19}{152 - n} \leq \frac{1}{7}.$$

Anfangs ist laut Tabelle $\#\mathrm{N} = 19$ und $\#\mathrm{G} = 152$, also

$$p = \frac{\#\mathrm{N}}{\#\mathrm{G}} = \frac{19}{152} = \frac{1}{8}.$$

Für kleine n ist also die Binomialverteilung eine gute Näherung für die Verteilung von X.

(2) WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR $X = \mu$ BERECHNEN

Gemäß Teilaufgabe (1) nehmen wir näherungsweise an, dass X binomialverteilt ist mit den Parametern:

$$n = 40 \text{ und } p = \tfrac{1}{8}.$$

Demzufolge ist der Erwartungswert:

$$\mu = n \cdot p = 40 \cdot \tfrac{1}{8} = 5.$$

Gesucht ist also:

$$P(X = 5) = \binom{40}{5} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{35} \approx 0{,}188$$

laut Bernoulli-Formel.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 40 zufällig ausgewählten Personen $\mu = 5$ Personen mit „Nein“ antworten, beträgt etwa 18,8 %.

Bemerkung:

In Wirklichkeit ist X hypergeometrisch verteilt zu den Parametern $n = 40$, $M = 19$ und $N = 152$, wobei auch hier der Erwartungswert $\mu = 5$ ist. Es ist:

$$P(X=5) = \frac{\binom{M}{5}\cdot\binom{N-M}{n-5}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{19}{5}\cdot\binom{133}{35}}{\binom{152}{40}} \approx 0{,}218.$$

(3) WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR 10 ANGABEN BERECHNEN

Es wurden $211 + 150 + 191 = 552$ Personen zwischen 14 und 49 Jahren befragt. Davon haben $12 + 14 + 8 = 34$ keine Angabe gemacht, d. h., $552 - 34 = 518$ Personen haben mit „Ja“ oder „Nein“ gestimmt.

Der Pfad, dessen Wahrscheinlichkeit zu bestimmen ist, zeichnet sich dadurch aus, dass bei jeder Befragung mit „Ja“ oder „Nein“ gestimmt wird.

Bei der ersten Befragung wird also mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = \frac{518}{552}$ eine Angabe gemacht. Mit jeder Befragung wird die Zahl der noch zur Auswahl stehenden Teilnehmer, die eine Angabe machen (Zähler der Wahrscheinlichkeit), um eins kleiner, ebenso die Gesamtzahl der noch zur Auswahl stehenden Teilnehmer (Nenner der Wahrscheinlichkeit).

Nach der 1. Pfadregel ist also

$$P(10\text{-mal Angabe}) = \frac{518}{552}\cdot\frac{517}{551}\cdot\frac{516}{550}\cdot\frac{515}{549}\cdot\frac{514}{548}\cdot\frac{513}{547}\cdot\frac{512}{546}\cdot\frac{511}{545}\cdot\frac{510}{544}\cdot\frac{509}{543}$$

$$\approx 0{,}527.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 52,7 % stimmen die ersten 10 Befragten mit „Ja“ oder „Nein“.

Bemerkung:

Auch bei d) (3) kann man näherungsweise mit dem Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ arbeiten. Man erhält dann

$$P(10\text{-mal Angabe}) \approx \left(\frac{518}{552}\right)^2 \approx 0{,}5295.$$

e)

(1) BEDEUTUNG DES KONFIDENZINTERVALLS ERLÄUTERN

Angenommen, es werden n Männer für die Stichprobe zufällig ausgewählt (wobei auch mehrfache Befragung derselben Person zugelassen wird), von denen k^* das Verbot von Gen-Mais befürworten. Dann ist k^* ein möglicher Wert einer binomialverteilten Zufallsvariablen mit Parametern n und p_M.

Der nächstliegende Schätzwert für p_M angesichts der Stichprobe ist der Anteil p_M^* der Befürworter in der Stichprobe, aber trotzdem ist es sehr unwahrscheinlich, dass $p_M = p_M^*$ ist. Deswegen versucht man, anhand der Stichprobe statt eines einzigen Schätzwertes einen Bereich anzugeben, in dem sich p_M sehr wahrscheinlich befindet.

Ist dieser Bereich ein Intervall, das nach einer festen Regel nur in Abhängigkeit vom zufälligen Wert k^* aus der Stichprobe ermittelt wird, so handelt es sich um ein Konfidenzintervall. Ist die Regel so geartet, dass sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % ein Intervall liefert, das den wahren Wert p_M enthält, so ist das nach dieser Regel zu einem vorgegebenen Stichprobenergebnis k^* bestimmte Intervall ein 90 %-Konfidenzintervall für p_M. In diesem Sinne kann man sagen, dass der zu schätzende Anteil der Gen-Mais-Gegner unter den Männern mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % in K_M liegt.

(2) 90 %-KONFIDENZINTERVALL FÜR p_F BESTIMMEN

Das 90 %-Konfidenzintervall K_F für p_F besteht aus allen p, für die der 90 %-Annahmebereich der Binomialverteilung zu den Parametern $n = 518$ und p die beobachtete Zahl 426 aus der Stichprobe enthält. Dabei ist der 90 %-Annahmebereich ein um den Erwartungswert $\mu_p = n \cdot p$ zentriertes Intervall $I_p = [\mu_p - m_p; \mu_p + m_p]$ mit der Eigenschaft, dass eine Zufallsvariable $Z \sim B(n; p)$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % Werte in I_p annimmt.

Laut den in Tabelle 1 angegebenen σ-Regeln (die wegen erfüllter Laplace-Bedingung angewendet werden dürfen) ist der 90 %-Annahmebereich der Binomialverteilung mit Parametern n und p näherungsweise das Intervall:

$[n \cdot p - 1{,}64 \cdot \sigma; n \cdot p + 1{,}64 \cdot \sigma]$,

wobei $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ die Standardabweichung der Binomialverteilung zu den Parametern n und p ist.

Die Untergrenze p_1 und die Obergrenze p_2 von K_F können also näherungsweise über die Gleichung

$n \cdot p \pm 1{,}64 \cdot \sigma = 426$

berechnet werden.

Durch Einsetzen von $n = 518$ und $\sigma = \sqrt{518 \cdot p \cdot (1-p)}$ ergibt sich:

$518 \cdot p \pm 1{,}64 \cdot \sqrt{518 \cdot p \cdot (1-p)} = 426$

$\pm 1{,}64 \cdot \sqrt{518 \cdot p \cdot (1-p)} = 426 - 518 \cdot p$

$1{,}64^2 \cdot 518 \cdot p \cdot (1-p) = (426 - 518 \cdot p)^2$

$1.393{,}2128 \cdot (p - p^2) = 426^2 - 2 \cdot 426 \cdot 518 \cdot p + 518^2 p^2$

$1.393{,}2128 \cdot (p - p^2) = 181\,476 - 441.336p + 268.324p^2$

$(268.324 + 1.393{,}2128)p^2 - (441.336 + 1.393{,}2128)p + 181.476 = 0$

$269.717{,}2128p^2 - 442.729{,}2128p + 181.476 = 0$

Mit Hilfe der quadratischen Lösungsformel erhält man:

$$p_1 = \frac{442.729{,}2128 - \sqrt{442.729{,}2128^2 - 4 \cdot 269.717{,}2128 \cdot 181.476}}{2 \cdot 269.717{,}2128}$$
$$\approx 0{,}7932$$

und:

$$p_2 = \frac{442.729{,}2128 + \sqrt{442.729{,}2128^2 - 4 \cdot 269.717{,}2128 \cdot 181.476}}{2 \cdot 269.717{,}2128}$$
$$\approx 0{,}8482.$$

Somit ist $K_F = [0{,}7932; 0{,}8482]$ näherungsweise ein 90 %-Konfidenzintervall für p_F.

(2) INTERPRETATION DER ÜBERSCHNEIDUNGSFREIHEIT DER KONFIDENZINTERVALLE

Angesichts der Ergebnisse der Umfrage ist die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl $p_M \in K_M$ als auch $p_F \in K_F$ liegt, mindestens $0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Anteil der Befürworter des Verbots unter den Frauen höher ist, als unter den Männern, beträgt also mindestens 81 %.