Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 6: Analytische Geometrie (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2013

Aufgabe 6

a)

ÜBERGANGSDIAGRAMM UND ÜBERGANGSMATRIX ERSTELLEN

ÜBERGANGSDIAGRAMM

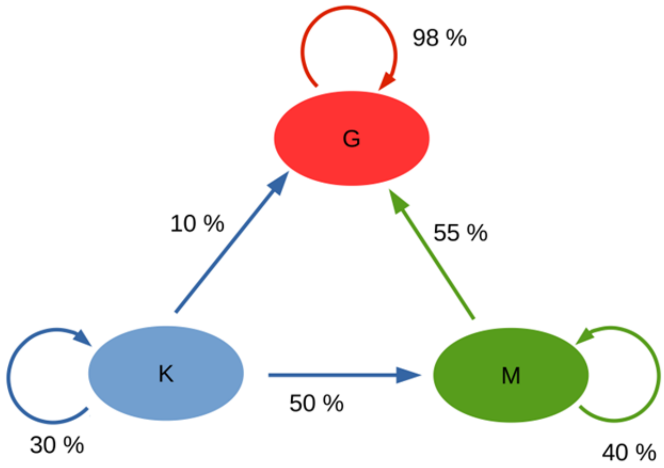
Von der Größenklasse K gehen
- 10 % in die Größenklasse G über
- 50 % in die Größenklasse M über
- 30 % in die Größenklasse K über

Von der Größenklasse M gehen
- 55 % in die Größenklasse G über
- 40 % in die Größenklasse M über

Von der Größenklasse G gehen
- 98 % in die Größenklasse G über

Keine Übergänge gibt es
- von M nach K
- von G nach M
- von G nach K

Damit erhält man das Übergangsdiagramm:



ÜBERGANGSMATRIX

Die Übergangsquoten lassen sich in einer Tabelle zusammenstellen. In jeder Zelle steht der Anteil des Anfangsbestandes, der von der über der Spalte stehenden Größenklasse in die am Zeilenanfang stehende Größenklasse übergeht:

von → nach ↓	K	M	G
K	30 % = 0,3	0	0
M	50 % = 0,5	40 % = 0,4	0
G	10 % = 0,1	55 % = 0,55	98 % = 0,98

Aus dieser Tabelle lässt sich die Übergangsmatrix $\boldsymbol{L}$ sofort ablesen:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}55 & 0{,}98 \end{pmatrix}$$

b)

(1) ANZAHL TANNEN AM ENDE DER WACHSTUMSPERIODE BESTIMMEN

Der Anfangszustand zu Beginn der betrachteten Wachstumsperiode:

K: 450 Tannen

M: 4230 Tannen

G: 5320 Tannen

Der Anfangszustand als Vektor dargestellt lautet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{K} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix}$$

Der Vektor, der den Zustand am Ende der Wachstumsperiode beschreibt, ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathrm{K}' \\ \mathrm{M}' \\ \mathrm{G}' \end{pmatrix} &= \boldsymbol{L} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{K} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{G} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}25 \cdot 450 + 0 \cdot 4230 + 0 \cdot 5320 \\ 0{,}7 \cdot 450 + 0{,}55 \cdot 4230 + 0 \cdot 5320 \\ 0 \cdot 450 + 0{,}4 \cdot 4230 + 0{,}95 \cdot 5320 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 112{,}5 \\ 2641{,}5 \\ 6746{,}0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Am Ende der Wachstumsperiode sind vorhanden:

Etwa 113 Tannen der Größenklasse K; etwa 2642 Tannen der Größenklasse M und 6746 Tannen der Größenklasse G.

(2) ANZAHL TANNEN EINE PERIODE VOR DER BESTANDSAUFNAHME BESTIMMEN

Gefragt ist der *Anfangs*zustand der vorhergehenden Wachstumsperiode. Man kennt den *End*zustand der vorhergehenden Wachstumsperiode, da dieser dem in der Aufgabe gegebenen *Anfangs*zustand der aktuellen Wachstumsperiode entspricht:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{K} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Anfangszustand $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ erfüllt somit die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I:} && 0{,}25x_1 && = 450 \\ &\mathrm{II:} && 0{,}7x_1 + 0{,}55x_2 && = 4230 \\ &\mathrm{III:} && 0{,}4x_2 + 0{,}95x_3 && = 5320 \end{aligned}$$

I liefert sofort $x_1 = \frac{450}{0{,}25} = 1800$. Dies in II eingesetzt liefert:

$0{,}7 \cdot 1800 + 0{,}55x_2 = 4230$, also

$$x_2 = (4230 - 0{,}7 \cdot 1800) : 0{,}55 = (4230 - 1260) : 0{,}55$$
$$= 2970 : 0{,}55 = 5400.$$

Dies in III eingesetzt liefert:
$0{,}4 \cdot 5400 + 0{,}95x_3 = 5320$, also

$$x_3 = \frac{1}{0{,}95} \cdot (5320 - 0{,}4 \cdot 5400) = \frac{1}{0{,}95} \cdot (5320 - 2160)$$
$$= \frac{1}{0{,}95} \cdot 3160 \approx 3326{,}3.$$

Eine Wachstumsperiode vor der Bestandsaufnahme gab es 1800 Tannen der Größenklasse K, 5400 Tannen der Größenklasse M und etwa 3326 Tannen der Größenklasse G.

(3) 95 %IGEN BESTAND AM ENDE DER WACHSTUMSPERIODE NACHWEISEN

Zustandsvektor zu Beginn einer beliebigen Wachstumsperiode:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Der Bestandsvektor am Ende der Wachstumsperiode lautet dann:

$$\boldsymbol{L} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0{,}25 \cdot x_1 \\ 0{,}7 \cdot x_1 + 0{,}55 \cdot x_2 \\ 0{,}4 \cdot x_2 + 0{,}95 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Die Gesamtanzahl Tannen ist jeweils die Summe der Komponenten.

$\Longrightarrow$ Gesamtanzahl Tannen zu Beginn der Periode: $x_1 + x_2 + x_3$

$\Longrightarrow$ Gesamtzahl Tannen zum Ende der Periode:

$$0{,}25x_1 + 0{,}7x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}4x_2 + 0{,}95x_3 = 0{,}95x_1 + 0{,}95x_2 + 0{,}95x_3$$
$$= 0{,}95 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$$

Dies ist also genau das 0,95-Fache des Anfangsbestandes.

Damit ist gezeigt, dass der Gesamtbestand an Tannen am Ende einer Wachstumsperiode 95 % des Anfangsbestandes beträgt.

(4) ZEITDAUER, BIS DER BESTAND UNTER 60 % SINKT, BERECHNEN

Sei x der Anfangsbestand. Nach einer Wachstumsperiode ist der Bestand auf $0{,}95 \cdot x$ zurück gegangen, nach zwei Wachstumsperioden beträgt er $0{,}95 \cdot (0{,}95 \cdot x) = 0{,}95^2 \cdot x$ und nach n Wachstumsperioden $0{,}95^n \cdot x$. Gesucht ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$, so dass $0{,}95^n \cdot x < 60\ \%$ von x.

$$\begin{aligned} & 0{,}95^n \cdot x < 0{,}6x \\ \Leftrightarrow\ & 0{,}95^n < 0{,}6 \\ \Leftrightarrow\ & \ln(0{,}95^n) < \ln(0{,}6) \\ \Leftrightarrow\ & n \cdot \ln(0{,}95) < \ln(0{,}6) \\ \Leftrightarrow\ & n > \frac{\ln(0{,}6)}{\ln(0{,}95)} \approx 9{,}96 \end{aligned}$$

Erstmals sinkt der Bestand also nach 10 Wachstumsperioden unter 60 % des ursprünglichen Bestandes.

c)

(1) ANZAHL TANNEN ZWISCHEN FÄLLEN UND AUFFORSTEN BERECHNEN

Übergangsmatrix: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

Baumbestand zu Beginn der Wachstumsperiode: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Bestand am Ende der Wachstumsperiode, bevor gefällt wird (Aufgabe b)(1)):

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \cdot x_1 \\ 0{,}7 \cdot x_1 + 0{,}55 \cdot x_2 \\ 0{,}4 \cdot x_2 + 0{,}95 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Nun werden gefällt:

20 % in Größenklasse K,

30 % in Größenklasse M,

45 % in Größenklasse G.

Der Bestand nach dem Fällen beträgt also:

80 % in Größenklasse K:

$0{,}8 \cdot (0{,}25 \cdot x_1) = 0{,}2 \cdot x_1$

70 % in Größenklasse M:

$0{,}7 \cdot (0{,}7 \cdot x_1 + 0{,}55 \cdot x_2) = 0{,}49 \cdot x_1 + 0{,}385 \cdot x_2$

55 % in Größenklasse G:

$0{,}55 \cdot (0{,}4 \cdot x_2 + 0{,}95 \cdot x_3) = 0{,}22 \cdot x_2 + 0{,}5225 \cdot x_3$

Der Bestand am Ende der Wachstumsperiode nach dem Fällen ist daher gegeben durch den Bestandsvektor:

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 \cdot x_1 \\ 0{,}49 \cdot x_1 + 0{,}385 \cdot x_2 \\ 0{,}22 \cdot x_2 + 0{,}5225 \cdot x_3 \end{pmatrix}.$$

(2) ÜBERGANGSMATRIX *C* BESTIMMEN

Die folgende Tabelle überträgt die Daten der Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$:

von → nach ↓	K	M	G
K	0,25	0	0
M	0,7	0,55	0
G	0	0,4	0,95

ÜBERGÄNGE NACH K: 1. ZEILE

In der ersten Zeile kommen so viele Bäume hinzu, wie insgesamt gefällt wurden – da die Fällungen in Klasse K in gleicher Anzahl in derselben Klasse ersetzt werden, wirken sich Fällungen und Wiederaufforstungen insgesamt nicht aus. Berücksichtigt werden müssen also nur die den Fällungen in den Klassen M und G entsprechenden Neupflanzungen. Das sind:

30 % in Größenklasse M:

$0{,}3 \cdot (0{,}7 \cdot x_1 + 0{,}55 \cdot x_2) = 0{,}21 \cdot x_1 + 0{,}165 \cdot x_2$

45 % in Größenklasse G:

$0{,}45 \cdot (0{,}4 \cdot x_2 + 0{,}95 \cdot x_3) = 0{,}18 \cdot x_2 + 0{,}4275 \cdot x_3.$

Insgesamt wurden also gefällt:

$$\begin{aligned}&0{,}21x_1 + 0{,}165x_2 + 0{,}18x_2 + 0{,}4275x_3\\ &= 0{,}21x_1 + 0{,}345x_2 + 0{,}4275x_3\end{aligned}$$

Anteilsmäßig wirkt sich die Aufforstung so aus, als gingen 34,5 % der Bäume der Klasse M und 42,75 % der Bäume der Klasse G noch zusätzlich in die Klasse K über, sowie weitere 21 % aus Klasse K selbst. Die erste Zeile von $\boldsymbol{A}$ wird also zu:

K	0,46	0,345	0,4275

ÜBERGÄNGE NACH M: 2. ZEILE

Die Fällung reduziert die in der zweiten Zeile angegebenen Übergänge auf 70 % des vorherigen Wertes, d. h., die zweite Zeile wird zu:

M	$0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$	$0{,}7 \cdot 0{,}55 = 0{,}385$	$0{,}7 \cdot 0 = 0$

ÜBERGÄNGE NACH G: 3. ZEILE

Die Fällung reduziert die in der dritten Zeile angegebenen Übergänge auf 55 % des vorherigen Wertes, d. h., die letzte Zeile wird zu:

G	$0{,}55 \cdot 0$ $= 0$	$0{,}55 \cdot 0{,}4$ $= 0{,}22$	$0{,}55 \cdot 0{,}95$ $= 0{,}5225$

Die vollständige Tabelle lautet somit:

von → nach ↓	K	M	G
K	0,46	0,345	0,4275
M	0,49	0,385	0
G	0	0,22	0,5225

Daraus liest man unmittelbar die Übergangsmatrix $\boldsymbol{C}$ ab:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 0{,}345 & 0{,}4275 \\ 0{,}49 & 0{,}385 & 0 \\ 0 & 0{,}22 & 0{,}5225 \end{pmatrix}.$$

(3) 95 %IGEN BESTAND AM ENDE DER WACHSTUMSPERIODE BEGRÜNDEN

In Aufgabe (b) wurde gezeigt, dass am Ende einer beliebigen Wachstumsperiode *ohne* Fällen und Aufforsten der Bestand bei 95 % des Anfangsbestandes dieser Wachstumsperiode liegt. Danach werden jedoch genau so viele Bäume neu gepflanzt wie abgeholzt, so dass zum Schluss die Anzahl der Bäume wieder 95 % des Anfangsbestandes beträgt.

(4) ANZAHL DER ZU PFLANZENDEN TANNEN BERECHNEN

Ausgehend von einem Anfangsbestand x_0 entwickelt sich der Baumbestand in den ersten zwei Jahren wie folgt:

Laut Aufgabe c) (3) ist der Bestand nach Fällungs- und ersten Wiederaufforstungsarbeiten $0{,}95 \cdot x_0$. Durch die zusätzliche Neupflanzung nach der ersten Wiederaufforstung kommen $a \cdot x_0$ Bäume hinzu, d. h. nach einem Jahr ist der neue Bestand bei

$$x_1 = 0{,}95 \cdot x_0 + a \cdot x_0 = (0{,}95 + a) \cdot x_0.$$

Am Ende der zweiten Wachstumsperiode ist der Bestand nach Fällungs- und ersten Wiederaufforstungsarbeiten bei $0{,}95 \cdot x_1$. Durch die zusätzlichen Neupflanzungen kommen $a \cdot x_1$ Bäume hinzu, d. h. nach zwei Jahren ist der neue Bestand bei

$$x_2 = 0{,}95 \cdot x_1 + a \cdot x_1 = (0{,}95 + a) \cdot x_1 = (0{,}95 + a)^2 \cdot x_0.$$

Um zu gewährleisten, dass der Bestand nach zwei Jahren um 10 % größer ist, als der Anfangsbestand, muss

$(0{,}95 + a)^2 \cdot x_0 = 1{,}1 \cdot x_0$ gelten. Wegen $x_0 > 0$ folgt also

$(0{,}95 + a)^2 = 1{,}1$

$\Leftrightarrow |0{,}95 + a| = \sqrt{1{,}1}$

$\Leftrightarrow 0{,}95 + a = \sqrt{1{,}1}$ (wegen $a > 0$)

$\Leftrightarrow a = \sqrt{1{,}1} - 0{,}95 \approx 0{,}0988.$

Am Ende jeder Wachstumsperiode müssen also nach der Wiederaufforstung etwa 9,88 % des Anfangsbestandes der jeweiligen Wachstumsperiode zusätzlich neu eingepflanzt werden.

Bemerkung:

Die Aufgabenstellung ist nicht eindeutig. Es könnte sein, dass mit „Anfangszustand" nicht der Anfangszustand der jeweiligen Wachstumsperiode, sondern ein fester Zeitpunkt gemeint ist. In diesem Fall ändert sich am Bestand nach dem ersten Jahr nichts, aber nach dem zweiten Jahr ist er nicht

$x_2 = 0{,}95 \cdot x_1 + a \cdot x_1 = (0{,}95 + a) \cdot x_1 = (0{,}95 + a)^2 \cdot x_0,$

sondern

$x_2 = 0{,}95 \cdot x_1 + a \cdot x_0 = 0{,}95 \cdot (0{,}95 + a) \cdot x_0 + a \cdot x_0 = (0{,}95^2 + 1{,}95a) \cdot x_0.$

Wenn das nun gleich $1{,}1 \cdot x_0$ sein soll, so muss

$$0{,}95^2 + 1{,}95a = 1{,}1$$

gewährleistet sein, d. h. man muss $a = \frac{1{,}1 - 0{,}95^2}{1{,}95} \approx 0{,}101$ wählen.