Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 5: Analytische Geometrie (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2013

Aufgabe 5

a)

(1) MATRIX UND VERSCHIEBUNGSVEKTOR BESTIMMEN

Die Elemente der Matrix M und die Koordinaten des Verschiebungsvektors $\vec{c}$ entsprechen 6 Unbekannten, die mithilfe entsprechender Gleichungen bestimmt werden müssen.

BEDINGUNGEN

- $P(0|4)$ wird auf $P'(6|1)$ abgebildet:
  $\alpha\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ liefert
  $\begin{pmatrix}4b_1\\4b_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$, also zwei Gleichungen

  I: $4b_1 + c_1 = 6$ und

  II: $4b_2 + c_2 = 1$.
- Die Punkte der Geraden g: $x_1 - x_2 = -1$ werden auf sich selbst abgebildet: wenn also $x_1 - x_2 = -1$ gilt, dann folgt
  $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

PUNKTE AUF g ERMITTELN

Hat ein Punkt auf g als erste Koordinate $x_1 = r$, so folgt aus der Gleichung $x_1 - x_2 = -1$, dass die zweite Koordinate $x_2 = x_1 + 1 = r + 1$ lautet. Die Punkte auf g sind somit genau die Punkte $(r|r+1)$ mit $r \in \mathbb{R}$. Für $r = 0$ und $r = -1$ ergeben sich die Punkte $A(0|1)$ und $B(-1|0)$. Laut der zweiten Bedingung sind das Fixpunkte der Abbildung α, also gilt

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}b_1 + c_1\\b_2 + c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

und

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -a_1 + c_1 \\ -a_2 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die zwei grünen Bedingungen liefern vier weitere Gleichungen:

III: $b_1 + c_1 = 0$,

IV: $b_2 + c_2 = 1$,

V: $-a_1 + c_1 = -1$ und

VI: $-a_2 + c_2 = 0$.

Der Übersichtlichkeit halber wiederholen wir an dieser Stelle nochmal die ersten zwei Gleichungen:

I: $4b_1 + c_1 = 6$ und

II: $4b_2 + c_2 = 1$.

III von I abziehen liefert $3b_1 = 6 \Longrightarrow b_1 = 2$. Dies wiederum in III eingesetzt liefert $c_1 = -2$. Dies wiederum in V eingesetzt liefert $-a_1 - 2 = -1 \Longrightarrow a_1 = -1$.

IV von II abziehen liefert $3b_2 = 0 \Longrightarrow b_2 = 0$. Dies wiederum in II eingesetzt liefert $c_2 = 1$. Dies wiederum in VI eingesetzt liefert $-a_2 + 1 = 0 \Longrightarrow a_2 = 1$.

Damit sind alle sechs Unbekannte bestimmt und die Abbildung α hat die Matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und den Verschiebungsvektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b)

(2) EIGENWERTE BESTÄTIGEN

λ ist genau dann ein Eigenwert von $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, wenn es einen Eigenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gibt, so dass $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gilt, d. h. die Koordinaten erfüllen die Gleichungen

$(-1) \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = \lambda \cdot x_1$ und
$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = \lambda \cdot x_2$. Äquivalent dazu ist das lineare Gleichungssystem

I: $(-1 - \lambda) \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 0$
II: $1 \cdot x_1 + (-\lambda) \cdot x_2 = 0$. Eine Lösung ist $x_1 = x_2 = 0$.

Dieses System hat genau dann eine weitere Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, wenn die Determinante der zugehörigen Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ verschwindet, also wenn

$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (-1-\lambda)\cdot(-\lambda) - 1\cdot 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$

Die quadratische Lösungsformel liefert die Lösungen

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}, \text{ also}$$

$\lambda = -2$ und $\lambda = 1$. Das sind also die Eigenwerte von M.

(2) EIGENVEKTOREN BESTIMMEN

Die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda = -2$ erfüllen

I: $(-1-\lambda)\cdot x_1 + 2\cdot x_2 = 0$ und
II: $1\cdot x_1 + (-\lambda)\cdot x_2 = 0$ (s.o.) mit $\lambda = -2$, also

I: $x_1 + 2x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = -2x_2$. Wählt man z. B. $x_2 = 1$, so ergibt sich der Eigenvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert -2.

Die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$ erfüllen

I: $-2x_1 + 2x_2 = 0$, also $x_2 = x_1$. Wählt man z. B. $x_1 = 1$, so ergibt sich der Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenvektor 1.

(3) ERGEBNISSE INTERPRETIEREN

Fixgeraden der Abbildung α haben die Eigenvektoren von M als Richtungsvektoren. Die Existenz zweier linear unabhängiger Eigenvektoren bedeutet also, dass es zwei nicht parallele Fixgeraden gibt. Eine solche ist die Fixpunktgerade g, die durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ r+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird (s.o.).

Da der Verschiebungsvektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von M ist, gibt es unendlich viele Fixgeraden mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; jede beliebige Wahl eines Stützvektors liefert eine solche. Zum Beispiel ist die Ursprungsgerade

$$h: \vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Fixgerade der Abbildung α. Jede weitere (außer g) ist parallel zu dieser.

c)

(1) GERADEN DURCH PUNKT UND BILDPUNKT VERGLEICHEN

$P(0|4)$; $P'(6|1)$

Gerade durch P und P':

$g_{P,P'}: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PP'} = \binom{0}{4} + r \cdot \left[\binom{6}{1} - \binom{0}{4}\right]$

$= \binom{0}{4} + r \cdot \binom{6}{-3}$ oder mit dem Parameter $s = -3r$

$\binom{0}{4} + s \cdot \binom{-2}{1}$.

Der Bildpunkt eines beliebigen Punktes $\binom{a_1}{a_2}$ ist gegeben durch

$\binom{a_1'}{a_2'} = \begin{pmatrix} -a_1 + 2a_2 - 2 \\ a_1 + 1 \end{pmatrix}$.

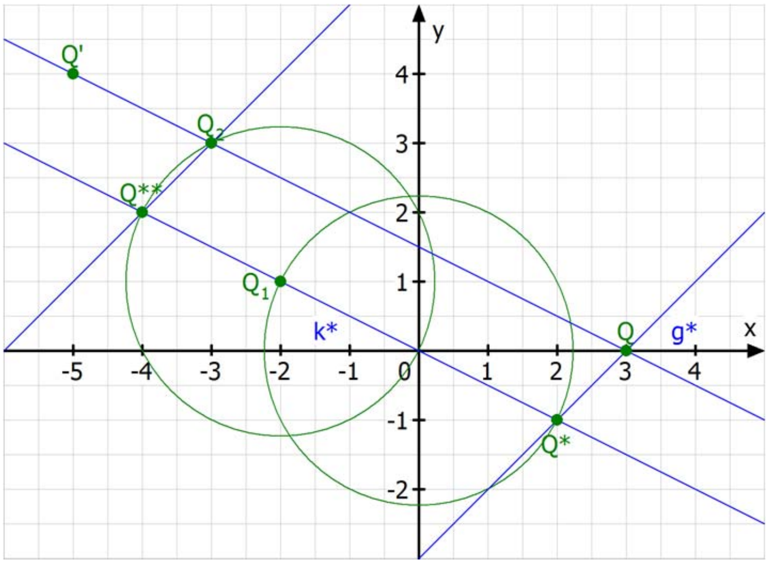
Die Gerade durch Punkt und Bildpunkt ist daher:

$$\begin{aligned} l: \vec{x} &= \binom{a_1}{a_2} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} -a_1 + 2a_2 - 2 \\ a_1 + 1 \end{pmatrix} - \binom{a_1}{a_2}\right] \\ &= \binom{a_1}{a_2} + t \cdot \begin{pmatrix} -2a_1 + 2a_2 - 2 \\ a_1 - a_2 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \binom{a_1}{a_2} + t \cdot (a_1 - a_2 + 1) \cdot \binom{-2}{1}. \end{aligned}$$

Alle diese Geraden haben als Richtungsvektor ein Vielfaches von $\binom{-2}{1}$, sind also parallel zueinander, insbesondere also parallel zu PP' (dies ist der Spezialfall $a_1 = 0, a_2 = 4$).

(2) KONSTRUKTION VON *Q'* ERLÄUTERN

Die gesamte Konstruktion mit Zirkel und Lineal ergibt folgendes Bild:



Der Eigenvektor der Matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 ist ein Richtungsvektor der Fixpunktgeraden $g: \binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{1} + r \cdot \binom{1}{1}, r \in \mathbb{R}$. Laut Teilaufgabe b) (2) ist der Verschiebungsvektor $\binom{-2}{1}$ ebenfalls ein

Eigenvektor der Matrix M, und zwar zum Eigenwert -2. Somit lässt sich Q' folgendermaßen konstruieren:

Zunächst werden in einem kartesischen Koordinatensystem der Punkt $Q(3|0)$ und die Gerade parallel zu g durch Q eingezeichnet (Bezeichnung: g^*). Dann kommt die Ursprungsgerade k^* hinzu, deren Richtungsvektor der Eigenvektor $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ von M ist (z. B. als Ursprungsgerade parallel zu PP'). Es sei Q^* der Schnittpunkt von k^* und g^*, also $Q^*(2|-1)$. Dann ist $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ^*} + \overrightarrow{Q^*Q}$, wobei $\overrightarrow{OQ^*}$ Eigenvektor von M zum Eigenwert -2 und $\overrightarrow{Q^*Q}$ Eigenvektor von M zum Eigenwert 1 ist – $\overrightarrow{OQ}$ ist nun als Summe aus Eigenvektoren dargestellt.

Anwendung von M streckt $\overrightarrow{OQ^*}$ um den Faktor 2 und spiegelt ihn am Ursprung; der so entstehende Punkt heiße Q^{**}.

Geometrisch kann Punkt Q^{**} wie folgt konstruiert werden: Mit dem Zirkel wird ein Kreis um den Ursprung gezeichnet, der den Punkt Q^* enthält (d. h., der Abstand von O zu Q^* wird mit dem Zirkel abgetragen). Der zweite Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden k^* (neben Q^*) ist $Q_1(-2|1)$. Zeichnet man nun einen Kreis mit demselben Radius um Q_1, so gibt es wieder zwei Schnittpunkte mit k^*: eine davon ist der Ursprung und der andere ist $Q^{**}(-4|2)$.

Damit ist die Streckung und Spiegelung von $\overrightarrow{OQ^*}$ erledigt und der Anteil $\overrightarrow{Q^*Q}$ von $\overrightarrow{OQ}$ muss noch addiert werden. Dazu zeichnet man die Gerade parallel zu k^* durch Q ein, ebenso die Gerade parallel zu g^* durch Q^{**}. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist $Q_2(-3|3)$.

Jetzt muss nur noch der Verschiebungsvektor $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ zu Q_2 addiert werden, um den Bildpunkt $Q'(-5|4)$ zu erhalten.

d)

(1) BILDPUNKT *P'* ZU *P* BERECHNEN

$$\begin{pmatrix}1-2k & 2\\ k & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0+8\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von k, weshalb alle Abbildungen α_k P auf denselben Bildpunkt $P'(6|1)$ abbilden.

(2) GEMEINSAMEN FIXPUNKT BERECHNEN

$(x_1|x_2)$ ist genau dann ein Fixpunkt von α_k, wenn gilt:

$\begin{pmatrix}1-2k & 2\\ k & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. Das ist gleichbedeutend mit

$(1-2k)\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - 2 = x_1$ und
$k\cdot x_1 + 1 = x_2$. Durch Umformung ergibt sich daraus das lineare Gleichungssystem

I: $-2kx_1 + 2x_2 = 2$

II: $kx_1 - x_2 = -1$.

I ergibt sich aus II durch Multiplikation mit -2, also sind die beiden Gleichungen äquivalent. Gemeinsame Fixpunkte aller α_k sind also Punkte $(x_1|x_2)$, deren Koordinaten

II: $kx_1 - x_2 = -1$

für jedes $k \in \mathbb{R}$ erfüllen, insbesondere also für $k = 0$ und für $k = 1$ Das führt auf die zwei Gleichungen

$-x_2 = -1$ und $x_1 - x_2 = -1$ mit $x_2 = 1$ und $x_1 = 0$ als einziger Lösung.

Somit gibt es genau einen gemeinsamen Fixpunkt der Abbildungen α_k, nämlich $(0|1)$.

(3) *k* FÜR SCHRÄGSPIEGELUNG BESTIMMEN

$\lambda = -1$ ist genau dann ein Eigenwert von $M_k = \begin{pmatrix} 1-2k & 2 \\ k & 0 \end{pmatrix}$, wenn es einen Eigenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gibt, so dass $\begin{pmatrix} 1-2k & 2 \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (-1)\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gilt, d. h. die Koordinaten erfüllen die Gleichungen

$(1-2k)\cdot x_1 + 2\cdot x_2 = -x_1$ und
$k\cdot x_1 = -x_2$. Durch Umformung ergibt sich daraus das lineare Gleichungssystem

I: $(2-2k)x_1 + 2x_2 = 0$

II: $kx_1 + x_2 = 0$.

Dieses System hat genau dann eine weitere Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, wenn die Determinante der zugehörigen Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 2-2k & 2 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ verschwindet, also wenn

$\det\begin{pmatrix} 2-2k & 2 \\ k & 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (2-2k)\cdot 1 - k\cdot 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 4k = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{2}{2}$.

Die Matrix M_k hat genau dann den Eigenwert -1, wenn $k = \frac{1}{2}$ ist. Nur dann ist also α_k eine Schrägspiegelung.