Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 4: Analytische Geometrie (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2013

Aufgabe 4

a)

(1) SEITENLÄNGEN BERECHNEN

Die Seitenlängen sind die Abstände der Eckpunkte voneinander:

$$\begin{aligned} d(A,C) &= \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 31 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(B,C) &= \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 31 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 32 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

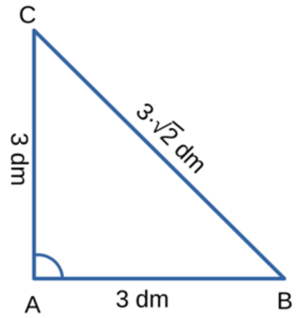
Die Seitenlängen des Dreiecks betragen:

$\overline{AC} = 3$ dm,
$\overline{BC} = 3\sqrt{2}$ dm und
$\overline{AB} = 3$ dm.

(2) POSITION DES RECHTEN WINKELS UND FLÄCHENINHALT BESTIMMEN

POSITION DES RECHTEN WINKELS

Der rechte Winkel liegt gegenüber der längsten Seite, also gegenüber BC. Somit handelt es sich um $\sphericalangle BAC$ an der Ecke A.



FLÄCHENINHALT DES DREIECKS

Der Flächeninhalt eines Dreiecks beträgt

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h,$$

wobei g die Grundseite und h die zugehörige Höhe des Dreiecks ist.

Bei einem rechtwinkligen Dreieck kann man eine der Katheten als Grundseite, die andere als Höhe wählen, z. B.:

$$g = \overline{AB};\ h = \overline{AC}$$

Damit folgt (Rechnung ohne Einheiten):

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt daher 4,5 dm².

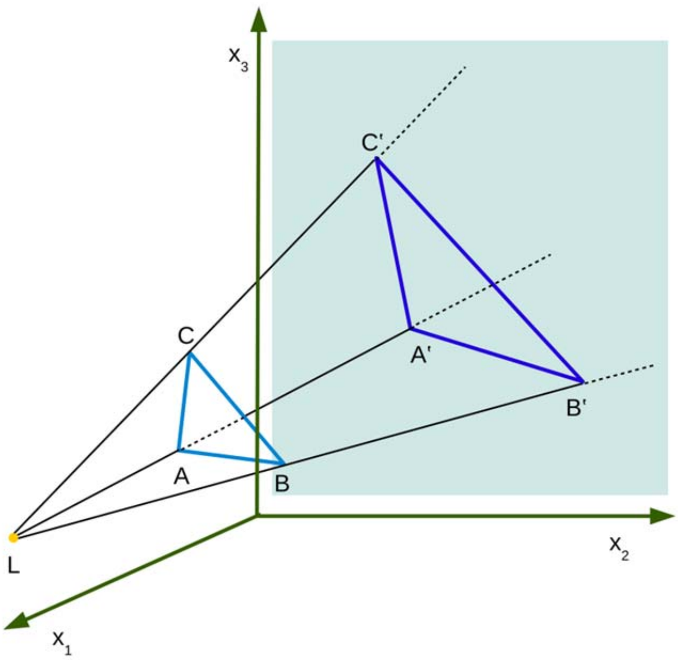
b)

(1) KOORDINATEN DER ECKPUNKTE DES SCHATTENS

Die Eckpunkte des Schattens A', B' und C' liegen auf den Geraden, die sich zwischen der Lichtquelle L und den Eckpunkten A, B, und C des Drahtmodells erstrecken.

Da der Schatten auf der Leinwand und damit in der x_2x_3-Ebene liegt, sind die Eckpunkte A', B' und C' die Schnittpunkte der drei genannten Geraden mit der x_2x_3-Ebene.

Aufgabe 4: Analytische Geometrie (WTR)



Zunächst müssen die Gleichungen der Geraden, auf denen die Lichtquelle und je ein Eckpunkt des Drahtmodells liegen, ermittelt werden.

GERADENGLEICHUNGEN AUFSTELLEN

Gerade durch L und A:

- Aufpunkt L
- Richtungsvektor $\overrightarrow{LA}$

$$g_{L,A}: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \overrightarrow{LA} = \overrightarrow{OL} + r \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OL})$$
$$= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 30-40 \\ 10-10 \\ 10-10 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gerade durch L und B:

- Aufpunkt L
- Richtungsvektor $\overrightarrow{LB}$

$$g_{L,B}: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{OL} + r \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OL})$$
$$= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 32-40 \\ 11-10 \\ 12-10 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gerade durch L und C:

- Aufpunkt L
- Richtungsvektor $\overrightarrow{LC}$

$$g_{L,C}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r\cdot\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{OL} + r\cdot\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OL}\right)$$
$$= \begin{pmatrix}40\\10\\10\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}31-40\\12-10\\8-10\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}40\\10\\10\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-9\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

KOORDINATEN DER ECKPUNKTE BERECHNEN

Die Eckpunkte des Schattens sind die Schnittpunkte der Geraden $g_{L,A}$, $g_{L,B}$ und $g_{L,C}$ mit der x_2x_3-Ebene.

Gleichung der x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$.

Von jeder Geraden muss also die erste Komponente null gesetzt werden:

bei $g_{L,A}$: $40 - 10r = 0 \Leftrightarrow r = 4$

Einsetzen in die Geradengleichung liefert

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix}40\\10\\10\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\10\\10\end{pmatrix} \Longrightarrow A'(0|10|10).$$

bei $g_{L,B}$: $40 - 8r = 0 \Leftrightarrow r = 5$

Einsetzen in die Geradengleichung liefert

$$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix}40\\10\\10\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}-8\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\15\\20\end{pmatrix} \Longrightarrow B'(0|15|20).$$

bei $g_{L,C}$: $40 - 9r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{40}{9}$

Einsetzen in die Geradengleichung liefert

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix}40\\10\\10\end{pmatrix} + \frac{40}{9}\cdot\begin{pmatrix}-9\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40\\10\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-40\\\frac{80}{9}\\-\frac{80}{9}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40-40\\\frac{90}{9}+\frac{80}{9}\\\frac{90}{9}-\frac{80}{9}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{170}{9}\\\frac{10}{9}\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow C'\left(0\left|\frac{170}{9}\right|\frac{10}{9}\right).$$

Die Eckpunkte des Schattendreiecks haben die Koordinaten

$A'(0|10|10)$, $B'(0|15|20)$ und $C'\left(0\left|\frac{170}{9}\right|\frac{10}{9}\right)$.

(2) INNENWINKEL VON ABC UND A'B'C' VERGLEICHEN

VERGLEICH VON $\sphericalangle(BAC)$ UND $\sphericalangle(B'A'C')$

Es ist $\sphericalangle(BAC) = 90°$ (s.o.) Der entsprechende Winkel $\sphericalangle(B'A'C')$ im Schattendreieck stimmt genau dann mit $\sphericalangle(BAC)$ überein, wenn die zwei Schenkel senkrecht aufeinander stehen. Das ist genau dann der Fall, wenn $\overrightarrow{A'C'} \circ \overrightarrow{A'B'} = 0$ ist.

Aber

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{170}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ \frac{170}{9} - 10 \\ \frac{10}{9} - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{80}{9} \\ -\frac{80}{9} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 15-10 \\ 20-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \text{ also ist}$$

$$\overrightarrow{A'C'} \circ \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{80}{9} \\ -\frac{80}{9} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + \frac{80}{9} \cdot 5 + \left(-\frac{80}{9}\right) \cdot 10 = -\frac{400}{9} \neq 0.$$

Somit ist $\sphericalangle(B'A'C') \neq 90° = \sphericalangle(BAC)$.

VERGLEICH VON $\sphericalangle(ACB)$ UND $\sphericalangle(A'C'B')$

Wie in Teilaufgabe a) (1) bemerkt ist ABC ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit $\sphericalangle BAC = 90°$, also sind die anderen beiden Innenwinkel jeweils 45 °.

Der Winkel $\sphericalangle(A'C'B')$ errechnet sich als Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{C'A'}$ und $\overrightarrow{C'B'}$ gemäß der Formel

$$\cos(\sphericalangle(A'C'B')) = \frac{\left|\overrightarrow{C'A'} \circ \overrightarrow{C'B'}\right|}{\left|\overrightarrow{C'A'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{C'B'}\right|}.$$

Nun ist

$$\overrightarrow{C'A'} = -\overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{80}{9} \\ \frac{80}{9} \end{pmatrix} \text{ (s.o.) und}$$

$$\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{170}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0-0 \\ 15 - \frac{170}{9} \\ 20 - \frac{10}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{135}{9} - \frac{170}{9} \\ \frac{180}{9} - \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{35}{9} \\ \frac{170}{9} \end{pmatrix}.$$

Da uns nur der Winkel zwischen $\overrightarrow{C'A'}$ und $\overrightarrow{C'B'}$ interessiert, können wir diese Vektoren beliebig strecken oder stauchen. Wir betrachten also der Einfachheit halber

$$\vec{v} = \frac{9}{80}\overrightarrow{C'A'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \frac{9}{5}\overrightarrow{C'B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\cos(\sphericalangle(A'C'B')) = \frac{|\vec{v} \circ \vec{w}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-7) + 1 \cdot 34}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 7^2 + 34^2}}$$
$$= \frac{41}{\sqrt{2}\sqrt{1205}} \Longrightarrow \sphericalangle(A'C'B') \approx 33{,}37°.$$

Somit ist $\sphericalangle(A'C'B') < \sphericalangle(ACB)$.

VERGLEICH VON $\sphericalangle(ABC)$ UND $\sphericalangle(A'B'C')$

Wie oben bemerkt ist $\sphericalangle(ABC) = 45°$.

Der Winkel $\sphericalangle(A'B'C')$ errechnet sich als Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{B'A'}$ und $\overrightarrow{B'C'}$ gemäß der Formel

$$\cos(\sphericalangle(A'B'C')) = \frac{\left|\overrightarrow{B'A'} \circ \overrightarrow{B'C'}\right|}{\left|\overrightarrow{B'A'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{B'C'}\right|}.$$

Dabei ist

$$\overrightarrow{B'A'} = -\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ (s.o.) und}$$

$$\overrightarrow{B'C'} = -\overrightarrow{C'B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{35}{9} \\ -\frac{170}{9} \end{pmatrix}.$$

Da uns nur der Winkel zwischen $\overrightarrow{B'A'}$ und $\overrightarrow{B'C'}$ interessiert, können wir diese Vektoren beliebig strecken oder stauchen. Wir betrachten also der Einfachheit halber

$$\vec{v}' = -\frac{1}{5}\overrightarrow{B'A'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w}' = \frac{9}{5}\overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -34 \end{pmatrix}$$

mit $|\vec{v}'| = \sqrt{5}$ und $|\vec{w}'| = |-\vec{w}'| = \sqrt{1205}$ (s.o.).

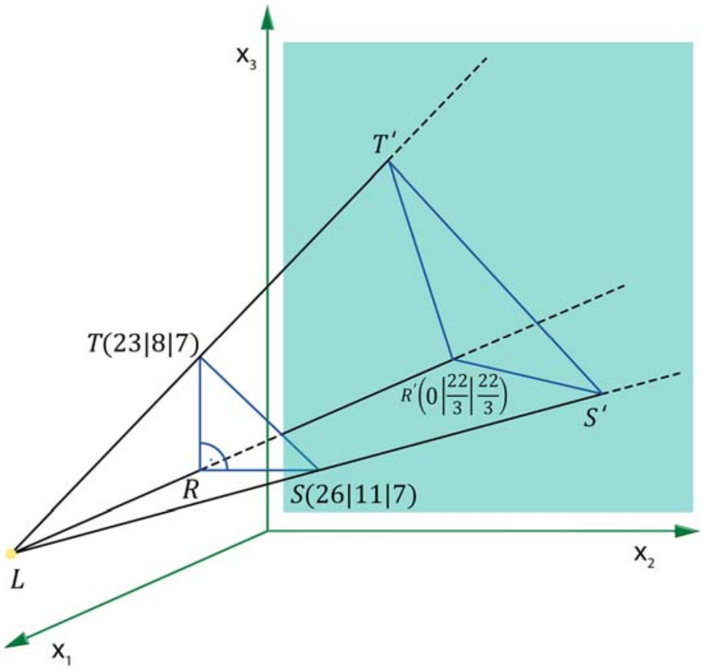
Somit ist

$$\cos(\sphericalangle(A'B'C')) = \frac{|\vec{v}' \circ \vec{w}'|}{|\vec{v}'| \cdot |\vec{w}'|}$$
$$= \frac{|0 \cdot 0 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot (-34)|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1205}} = \frac{61}{\sqrt{6025}}$$

$\Longrightarrow \sphericalangle(A'B'C') \approx 38{,}20° \neq 45° = \sphericalangle(ABC)$.

Insgesamt sehen wir, dass sich alle drei Winkel durch die Projektion geändert haben.

c)



(1) GLEICHUNG DER GERADEN *LR'*

Gerade durch L und R':

- Aufpunkt L
- Richtungsvektor $\overrightarrow{LR'}$

$$g_{L,R'}: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + \mu \cdot \overrightarrow{LR'} = \overrightarrow{OL} + \mu \cdot \left(\overrightarrow{OR'} - \overrightarrow{OL}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 - 40 \\ \frac{22}{3} - 10 \\ \frac{22}{3} - 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ \frac{22}{3} - \frac{30}{3} \\ \frac{22}{3} - \frac{30}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Um zukünftige Rechnungen zu vereinfachen, wird der Richtungsvektor gestaucht: Wir nehmen $-\frac{3}{8}\cdot\begin{pmatrix}-40\\-\frac{8}{3}\\-\frac{8}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\1\\1\end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix}-40\\-\frac{8}{3}\\-\frac{8}{3}\end{pmatrix}$ und erhalten damit die Parametergleichung

$$g_{L,R'}\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}40\\10\\10\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}15\\1\\1\end{pmatrix}, \mu\in\mathbb{R}.$$

(2) GLEICHUNG DER EBENE *E*

Sei $X(x_1|x_2|x_3)$ ein Punkt der Ebene E, d. h. X habe von S und T denselben Abstand. Dann gilt

$$|\overrightarrow{XS}|=|\overrightarrow{XT}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OX}|=|\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OX}|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix}26\\11\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}23\\8\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(26-x_1)^2+(11-x_2)^2+(7-x_3)^2}$$
$$=\sqrt{(23-x_1)^2+(8-x_2)^2+(7-x_3)^2}$$

$$\Leftrightarrow 676-52x_1+x_1^2+121-22x_2+x_2^2+49-14x_3+x_3^2$$
$$=529-46x_1+x_1^2+64-16x_2+x_2^2+49-14x_3+x_3^2$$

Zusammenfassen ergibt:

$$-6x_1-6x_2+204=0$$

$$\Leftrightarrow -x_1-x_2=-34$$

$$\Leftrightarrow x_1+x_2=34.$$

Damit lautet die Gleichung der gesuchten Ebene

$$E\colon x_1+x_2=34.$$

(3) POSTION DER ECKE *R* BERECHNEN

Bei T und S liegen 45°-Winkel und bei R ein 90°-Winkel, d. h., die Katheten sind gleich lang.

$\Rightarrow$ Die an die Ecke R anschließenden Seiten sind gleich lang.

Damit hat R von S und T denselben Abstand

$\Rightarrow$ R ist ein Punkt der Ebene E.

R ist aber auch ein Punkt auf der Geraden LR' (siehe Aufgabe (1)). Damit ist R der Schnittpunkt von LR' und E.

Einsetzen der einzelnen Koordinaten der Parametergleichung

$$g_{L,R'}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in die Ebenengleichung $E: x_1 + x_2 = 34$ liefert

$40 + \mu \cdot 15 + 10 + \mu \cdot 1 = 34$

$\Leftrightarrow 16\mu = 34 - 50 = -16 \Leftrightarrow \mu = -1.$

Einsetzen dieses Parameters in die Geradengleichung liefert den Ortsvektor des Schnittpunkts

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

R hat also die Koordinaten $R(25|9|9)$.

(4) LÖSUNGSWEG OHNE EBENE *E*

Das Dreieck RST ist ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei R. Die Katheten werden durch die folgenden Vektoren dargestellt:

$$\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 23 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 26 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix},$$

wobei der allgemeine Geradenpunkt von $LR' = g_{L,R'}$ den Ortsvektor

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 + 15\mu \\ 10 + \mu \\ 10 + \mu \end{pmatrix} \text{ hat.}$$

Einsetzen liefert

$$\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 23 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 + 15\mu \\ 10 + \mu \\ 10 + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 - 15\mu \\ -2 - \mu \\ -3 - \mu \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 26 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 - 15\mu \\ 1 - \mu \\ -3 - \mu \end{pmatrix}.$$

Aus Aufgabe a) (1) kennen wir die Seitenlängen des Drahtmodells und damit die Längen dieser Katheten, nämlich $|\overrightarrow{RT}| = |\overrightarrow{RS}| = 3$.

Die Gleichungen

$$\left|\begin{pmatrix} -17 - 15\mu \\ -2 - \mu \\ -3 - \mu \end{pmatrix}\right| = 3 \text{ und } \left|\begin{pmatrix} -14 - 15\mu \\ 1 - \mu \\ -3 - \mu \end{pmatrix}\right| = 3 \text{ sind äquivalent zu}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -17 - 15\mu \\ -2 - \mu \\ -3 - \mu \end{pmatrix}\right|^2 = 9 \text{ und } \left|\begin{pmatrix} -14 - 15\mu \\ 1 - \mu \\ -3 - \mu \end{pmatrix}\right|^2 = 9.$$

Das sind zwei quadratische Gleichungen, die der Parameter μ erfüllen muss. Wenn L nicht in der Ebene E liegt, dann haben diese beiden Gleichungen nur eine gemeinsame Lösung (im vorliegenden Fall $\mu = -1$).

Einsetzen dieser gemeinsamen Lösung in den allgemeinen Geradenpunkt $(40 + 15\mu|10 + \mu|10 + \mu)$ liefert dann den Punkt R.

Wenn aber L in E liegt und aufgrund der Gleichschenkligkeit von RST auch R in E liegt, dann liegt die ganze Gerade LR' in E. In diesem Fall sind die beiden quadratischen Gleichungen äquivalent, haben also dieselben Lösungen. Dabei können zwei Fälle auftreten:

1. Die Gleichungen haben jeweils nur eine Lösung. Dann liefert diese Lösung durch einsetzen in den allgemeinen Geradenpunkt die Koordinaten von R.
2. Die Gleichungen haben jeweils zwei Lösungen. Diese beiden Lösungen liefern durch Einsetzen in den allgemeinen Geradenpunkt die Koordinaten zweier möglicher Lagen von R, die denselben Schattenpunkt R' erzeugen. In diesem Fall ist also R durch die vorgegebenen Daten nicht eindeutig bestimmt.