

**Aufgabe 5:** Analytische Geometrie (WTR)

Abitur Mathematik: Originalprüfung

**Aufgabe 5:**  
**Analytische Geometrie (WTR)**

Nordrhein-Westfalen 2013 GK

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

## Aufgabe 5

In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  ist die Abbildung  $\alpha$  gegeben durch die Gleichung

$$\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Das Viereck  $ABCD$  hat die Eckpunkte  $A(-1|0)$ ,  $B(1|0)$ ,  $C(3|2)$  und  $D(1|2)$ .

- (1) Zeigen Sie, dass das Viereck  $ABCD$  ein Parallelogramm ist.
- (2) Berechnen Sie die Koordinaten der Bildpunkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  und zeigen Sie, dass das Viereck  $A'B'C'D'$  ein Quadrat ist. (12 Punkte)

b) Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

- (1) Bestimmen Sie eine Gleichung der Bildgeraden  $g'$  von  $g$  bezüglich der Abbildung  $\alpha$  und ermitteln Sie die Lagebeziehung von  $g$  und  $g'$ .

**Aufgabe 5:** Analytische Geometrie (WTR)

- (2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Bildgeraden  $h'$  von  $h$  bezüglich der Abbildung  $\alpha$  und ermitteln Sie die Lagebeziehung von  $h$  und  $h'$ . (13 Punkte)
- c) Zeigen Sie, dass die Abbildung  $\alpha$  die folgenden Eigenschaften besitzt:
1. Der Punkt  $P(0|4)$  wird durch  $\alpha$  auf den Punkt  $P'(6|1)$  abgebildet.
  2. Jeder Punkt der Geraden  $k: x_1 - x_2 = -1$  wird durch  $\alpha$  auf sich selbst abgebildet.
  3. Jeder Punkt, der nicht auf der Geraden  $k$  liegt, wird nicht auf sich selbst abgebildet.
  4. Jede Gerade, die durch einen Punkt, der nicht auf der Geraden  $k$  liegt, und seinen Bildpunkt verläuft, ist parallel zur Geraden  $PP'$ . (13 Punkte)
- d) Nun soll der Bildpunkt  $Q'$  des Punktes  $Q(3|0)$  geometrisch konstruiert werden.  
Stellen Sie diese geometrische Konstruktion graphisch dar und erklären Sie Ihr Vorgehen. (12 Punkte)