Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 6: Analytische Geometrie (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2013

Aufgabe 6

a)

ÜBERGANGSDIAGRAMM ERSTELLEN

Von der Größenklasse K gehen

- 10 % in die Größenklasse G über
- 50 % in die Größenklasse M über
- 30 % in die Größenklasse K über

Von der Größenklasse M gehen

- 55 % in die Größenklasse G über
- 40 % in die Größenklasse M über

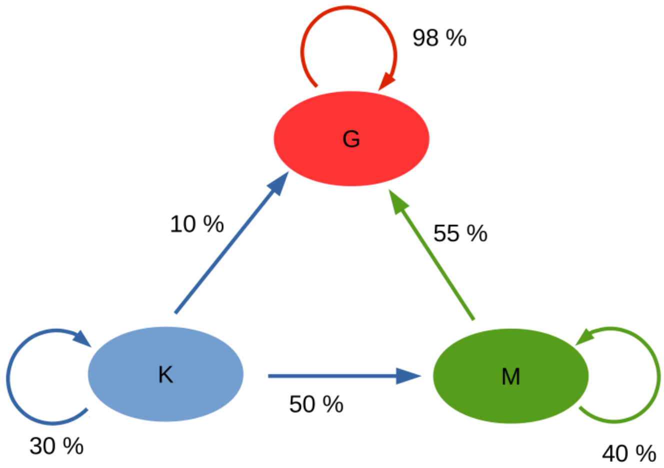
Von der Größenklasse G gehen

- 98 % in die Größenklasse G über

Keine Übergänge gibt es

- von M nach K
- von G nach M
- von G nach K

Damit erhält man das Übergangsdiagramm:



ÜBERGANGSMATRIX AUFSTELLEN

Die Übergangsquoten lassen sich in einer Tabelle zusammenstellen. In jeder Zelle steht der Anteil des Anfangsbestandes, der von der über der Spalte stehenden Größenklasse in die am Zeilenanfang stehende Größenklasse übergeht:

von → nach ↓	K	M	G
K	30 % = 0,3	0	0
M	50 % = 0,5	40 % = 0,4	0
G	10 % = 0,1	55 % = 0,55	98 % = 0,98

Aus dieser Tabelle lässt sich die Übergangsmatrix $\boldsymbol{L}$ sofort ablesen:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,55 & 0,98 \end{pmatrix}$$

b)

(1) ANZAHL TANNEN AM ENDE DER WACHSTUMSPERIODE BESTIMMEN

Der Anfangszustand zu Beginn der betrachteten Wachstumsperiode ist in der Aufgabenstellung gegeben:

K: 450 Tannen

M: 4230 Tannen

G: 5320 Tannen

Diesen Anfangszustand stellt man als Vektor dar:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} K \\ M \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix}$$

Der Vektor, der den Zustand am Ende der Wachstumsperiode beschreibt, lautet demnach

$$\begin{pmatrix} K' \\ M' \\ G' \end{pmatrix} = \boldsymbol{L} \cdot \begin{pmatrix} K \\ M \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0{,}25 \cdot 450 + 0 \cdot 4230 + 0 \cdot 5320 \\ 0{,}7 \cdot 450 + 0{,}55 \cdot 4230 + 0 \cdot 5320 \\ 0 \cdot 450 + 0{,}4 \cdot 4230 + 0{,}95 \cdot 5320 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 112{,}5 \\ 2641{,}5 \\ 6746{,}0 \end{pmatrix}.$$

ERGEBNIS

Am Ende der Wachstumsperiode sind vorhanden:

Etwa 113 Tannen der Größenklasse K; etwa 2642 Tannen der Größenklasse M und 6746 Tannen der Größenklasse G.

(2) ANZAHL TANNEN EINE PERIODE VOR DER BESTANDSAUFNAHME BESTIMMEN

Gefragt ist der *Anfangs*zustand der vorhergehenden Wachstumsperiode. Man kennt den *End*zustand der vorhergehenden Wachstumsperiode, dieser ist der in der Aufgabe gegebene *Anfangs*zustand der aktuellen Wachstumsperiode:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} K \\ M \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Anfangszustand $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ erfüllt somit die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\text{I:} && 0{,}25x_1 && = 450 \\ &\text{II:} && 0{,}7x_1 + 0{,}55x_2 && = 4230 \\ &\text{III:} && 0{,}4x_2 + 0{,}95x_3 && = 5320 \end{aligned}$$

I liefert sofort $x_1 = \frac{450}{0{,}25} = 1800$. Dies in II eingesetzt liefert

$0{,}7 \cdot 1800 + 0{,}55x_2 = 4230$, also

$$x_2 = (4230 - 0{,}7 \cdot 1800) : 0{,}55 = (4230 - 1260) : 0{,}55 \\ = 2970 : 0{,}55 = 5400.$$

Dies in III eingesetzt liefert
$0{,}4 \cdot 5400 + 0{,}95x_3 = 5320$, also

$$x_3 = \frac{1}{0{,}95} \cdot (5320 - 0{,}4 \cdot 5400) = \frac{1}{0{,}95} \cdot (5320 - 2160) \\ = \frac{1}{0{,}95} \cdot 3160 \approx 3326{,}3.$$

ERGEBNIS

Eine Wachstumsperiode vor der Bestandsaufnahme gab es 1800 Tannen der Größenklasse K, 5400 Tannen der Größenklasse M und etwa 3326 Tannen der Größenklasse G.

(3) 95 %IGEN BESTAND AM ENDE DER WACHSTUMSPERIODE NACHWEISEN

Der Zustandsvektor zu Beginn einer Wachstumsperiode sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Die Gesamtanzahl Tannen ist die Summe der Komponenten.
$\Rightarrow$ Gesamtanzahl Tannen zu Beginn: $x_1 + x_2 + x_3$.

Der Bestandsvektor am Ende der Wachstumsperiode lautet:

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \cdot x_1 \\ 0{,}7 \cdot x_1 + 0{,}55 \cdot x_2 \\ 0{,}4 \cdot x_2 + 0{,}95 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Gesamtzahl Tannen zum Ende der Periode:

$$0{,}25x_1 + 0{,}7x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}4x_2 + 0{,}95x_3 = 0{,}95x_1 + 0{,}95x_2 + 0{,}95x_3 \\ = 0{,}95 \cdot (x_1 + x_2 + x_3).$$

Dies ist also genau das 0,95-fache des Ausgangsbestandes.

ERGEBNIS

Damit ist gezeigt, dass der Gesamtbestand an Tannen am Ende einer Wachstumsperiode 95 % des Anfangsbestandes beträgt.

(4) ZEITDAUER, BIS DER BESTAND UNTER 60 % SINKT, BERECHNEN

Sei x der Anfangsbestand. Nach einer Wachstumsperiode ist der Bestand auf $0{,}95 \cdot x$ zurück gegangen, nach zwei Wachstumsperioden beträgt er $0{,}95 \cdot (0{,}95 \cdot x) = 0{,}95^2 \cdot x$ und nach n Wachstumsperioden $0{,}95^n \cdot x$.
Gesucht ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$, so dass $0{,}95^n \cdot x < 60\,\%$ von x.

$$
\begin{aligned}
& 0{,}95^n \cdot x < 0{,}6x \\
\Leftrightarrow\ & 0{,}95^n < 0{,}6 \\
\Leftrightarrow\ & \ln(0{,}95^n) < \ln(0{,}6) \\
\Leftrightarrow\ & n \cdot \ln(0{,}95) < \ln(0{,}6) \\
\Leftrightarrow\ & n > \frac{\ln(0{,}6)}{\ln(0{,}95)} \approx 9{,}96
\end{aligned}
$$

ERGEBNIS

Erstmals sinkt der Bestand also nach 10 Wachstumsperioden unter 60 % des ursprünglichen Bestandes.

c)

(1) ANZAHL TANNEN ZWISCHEN FÄLLEN UND AUFFORSTEN BERECHNEN

Übergangsmatrix: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

Baumbestand zu Beginn der Wachstumsperiode: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Bestand am Ende der Wachstumsperiode, bevor gefällt wird:

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \cdot x_1 \\ 0{,}7 \cdot x_1 + 0{,}55 \cdot x_2 \\ 0{,}4 \cdot x_2 + 0{,}95 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Von dem Bestand $0{,}4 \cdot x_2 + 0{,}95 \cdot x_3$ der Klasse G werden nun 56 % gefällt. Der Bestand nach dem Fällen beträgt also noch 44 %:

$0{,}44 \cdot (0{,}4 \cdot x_2 + 0{,}95 \cdot x_3) = 0{,}176x_2 + 0{,}418x_3$.

ERGEBNIS

Der Bestand am Ende der Wachstumsperiode nach dem Fällen ist gegeben durch den Bestandsvektor

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 \cdot x_1 \\ 0{,}7 \cdot x_1 + 0{,}55 \cdot x_2 \\ 0{,}176 \cdot x_2 + 0{,}418 \cdot x_3 \end{pmatrix}.$$

(2) ÜBERGANGSMATRIX *C* BESTIMMEN

Die folgende Tabelle überträgt die Daten der Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$:

von → nach ↓	K	M	G
K	0,25	0	0
M	0,7	0,55	0

G	0	0,4	0,95

ÜBERGÄNGE NACH K: 1. ZEILE

Die erste Zeile wird von der Wiederaufforstung beeinflusst. Hier kommen so viele Bäume hinzu, wie von der Klasse G gefällt wurden. Das sind 56 % der Anzahl der Bäume vor dem Abholzen, d. h. $0{,}56 \cdot (0{,}4 \cdot x_2 + 0{,}95 \cdot x_3) = 0{,}224x_2 + 0{,}532x_3$ Stück. Anteilsmäßig wirkt sich die Aufforstung so aus, als gingen 22,4 % der Bäume der Klasse M und 53,2 % der Bäume der Klasse G noch zusätzlich in die Klasse K über. Die erste Zeile wird also zu

K	0,25	0,224	0,532

ÜBERGÄNGE NACH M: 2. ZEILE

An den Übergängen zur Klasse M ändert sich nichts, die zweite Zeile bleibt also gleich.

ÜBERGÄNGE NACH G: 3. ZEILE

Die Fällung reduziert die in der dritten Zeile angegebenen „de facto“-Übergänge auf 44 % des vorherigen Wertes, d. h. die letzte Zeile wird zu

G	$0{,}44 \cdot 0 = 0$	$0{,}44 \cdot 0{,}4 = 0{,}176$	$0{,}44 \cdot 0{,}95 = 0{,}418$

ERGEBNIS

Die vollständige Tabelle lautet somit

von → nach ↓	K	M	G
K	0,25	0,224	0,532
M	0,7	0,55	0
G	0	0,176	0,418

Daraus liest man unmittelbar die Übergangsmatrix $\boldsymbol{C}$ ab:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}224 & 0{,}532 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}176 & 0{,}418 \end{pmatrix}.$$

(3) 95 %IGEN BESTAND AM ENDE DER WACHSTUMSPERIODE BEGRÜNDEN

In Aufgabenteil b) wurde gezeigt, dass am Ende einer Wachstumsperiode vor dem Fällen und Aufforsten der Bestand bei 95 % des Anfangsbestandes dieser Wachstumsperiode liegt. Danach werden genau so viele Bäume neu eingepflanzt wie abgeholzt, so dass zum Schluss die Anzahl der Bäume wieder 95 % des Anfangsbestandes beträgt.

(4) ANZAHL DER ZU ERSETZENDEN TANNEN BERECHNEN

Die zu ersetzenden Tannen sind zum einen die am Ende der Wachstumsperiode gefällten Bäume der Klasse G und zum anderen der natürliche Schwund, der schon vor den Fällarbeiten auftritt.

NATÜRLICHER SCHWUND

Die erste Spalte von $\boldsymbol{A}$ besagt, dass 25 % der Klasse K in die Klasse M und 70 % der Klasse K in die Klasse G übergehen. Es sind also am Ende der Wachstumsperiode 25 % + 70 % = 95% vorhanden, 5 % sind demnach gestorben. Die Spaltensummen der 2. und 3. Spalte zeigen, dass von den anderen Klassen auch jeweils 5 % der Bäume sterben. Gemessen an einem Bestandsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ zu Beginn der Wachstumsperiode heißt das, dass $0{,}05 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$ Bäume nachgepflanzt werden müssen, um den natürlichen Schwund auszugleichen.

SCHWUND DURCH FÄLLUNG

In Teilaufgabe c) (2) wurde berechnet, dass $0{,}56 \cdot (0{,}4 \cdot x_2 + 0{,}95 \cdot x_3) = 0{,}224x_2 + 0{,}532x_3$ Bäume am Ende der Wachstumsphase abgeholzt werden. Diese Anzahl Bäume muss also noch zusätzlich neu gepflanzt werden.

ERGEBNIS

Insgesamt müssen also bei einem Bestandsvektor von $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$0{,}05 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) + 0{,}224x_2 + 0{,}532x_3 = 0{,}05x_1 + 0{,}229x_2 + 0{,}537x_3$$

Bäume nachgepflanzt werden, um am Ende der Wachstumsperiode nach den Fällarbeiten den ursprünglichen Bestand wiederherzustellen.