Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 5: Analytische Geometrie (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2013

Aufgabe 5

a)

(1) PARALLELOGRAMMEIGENSCHAFTEN NACHWEISEN

Zu zeigen ist, dass die gegenüberliegenden Seiten parallel sind, d. h. $AB \parallel CD$ und $BC \parallel AD$. Zunächst ist

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ linear abhängig, also gilt $AB \parallel CD$. $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AD}$ sind identisch, also gilt auch $BC \parallel AD$.

ERGEBNIS

Die Seiten AB und CD sowie die Seiten BC und DA sind jeweils parallel, womit nachgewiesen ist, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

(2) BILDPUNKTE BERECHNEN UND QUADRATEIGENSCHAFT NACHWEISEN

BILDPUNKTE BERECHNEN

Setze $A'(a_1|a_2)$ als Bildpunkt von $A(-1|0)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 0 \\ 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$B'(b_1|b_2)$ als Bildpunkt von $B(1|0)$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$C'(c_1|c_2)$ als Bildpunkt von $C(3|2)$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$D'(d_1|d_2)$ als Bildpunkt von $D(1|2)$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} d_1' \\ d_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ERGEBNIS

Die Bildpunkte haben die Koordinaten $A'(-1|0)$, $B'(-3|2)$, $C'(-1|4)$, $D'(1|2)$.

QUADRATEIGENSCHAFTEN NACHWEISEN

Zu zeigen ist, dass die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang sind und benachbarte Seiten einen rechten Winkel bilden.

PARALLELITÄT GEGENÜBERLIEGENDER SEITEN NACHWEISEN

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, also $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{C'D'}$ linear abhängig und somit $A'B' \parallel C'D'$. $\overrightarrow{B'C'}$ und $\overrightarrow{A'D'}$ sind identisch und somit $B'C' \parallel A'D'$.

SEITENLÄNGEN VERGLEICHEN

Die Längen der Seiten sind:

$\overline{A'B'} = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$,

$\overline{B'C'} = \left|\overrightarrow{B'C'}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$,

$\overline{C'D'} = \left|\overrightarrow{C'D'}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ und

$\overline{D'A'} = \left|\overrightarrow{D'A'}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$.

Damit sind alle vier Seiten des Vierecks gleich lang.

INNENWINKEL UNTERSUCHEN

Nun wird geprüft, dass alle Innenwinkel rechte Winkel sind.

Winkel bei A':

$\overrightarrow{A'B'} \circ \overrightarrow{D'A'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) = 4 - 4 = 0$

Winkel bei B':

$\overrightarrow{B'C'} \circ \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = -4 + 4 = 0$

Winkel bei C':

$\overrightarrow{B'C'} \circ \overrightarrow{C'D'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 4 - 4 = 0$

Winkel bei D':

$\overrightarrow{C'D'} \circ \overrightarrow{D'A'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) = -4 + 4 = 0$

Alle Innenwinkel des Vierecks sind rechte Winkel.

ERGEBNIS

Das Viereck $A'B'C'D'$ ist ein Quadrat.

b)

(1) BILDGERADE g' UND LAGEBEZIEHUNG VON g UND g' BESTIMMEN

GLEICHUNG DER BILDGERADE FINDEN

Die Gleichung von g lautet

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3r \\ -1 + r \end{pmatrix}$.

Einsetzen in die Gleichung der Abbildung α liefert

$$\begin{aligned}\alpha\begin{pmatrix}1+3r\\-1+r\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+3r\\-1+r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(-1)\cdot(1+3r)+2\cdot(-1+r)\\1\cdot(1+3r)+0\cdot(-1+r)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3-r\\1+3r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5-r\\2+3r\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Bildgerade hat also die Gleichung

$$g'\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, r\in\mathbb{R}.$$

LAGEBEZIEHUNG ZWISCHEN g UND g' BESTIMMEN

Um die Schnittmenge der Geraden g und g' zu bestimmen, müssen die Geradengleichungen mit unterschiedlichen Parametern herangezogen werden; wir nehmen s für g'. Gleichsetzen von g und g' liefert dann $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, also als lineares Gleichungssystem

I: $1+3r=-5-s$
II: $-1+r=2+3s$

$$\text{I}-3\cdot\text{II}: 4=-11-10s \Leftrightarrow 15=-10s \Leftrightarrow s=-\frac{3}{2}$$

Eingesetzt in I liefert das:

$$1+3r=-5+\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3r=-\frac{9}{2}\Leftrightarrow r=-\frac{3}{2}.$$

Somit gibt es genau einen Schnittpunkt von g und g', nämlich $\left(1-\frac{3}{2}\cdot 3\middle|-1-\frac{3}{2}\cdot 1\right)=\left(-\frac{7}{2}\middle|-\frac{5}{2}\right)$.

(2) BILDGERADE h' UND LAGEBEZIEHUNG VON h UND h' BESTIMMEN

GLEICHUNG DER BILDGERADE FINDEN

Die Gleichung von h lautet

$$h\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+2s\\-2-s\end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die Gleichung der Abbildung α liefert

$$\begin{aligned}\alpha\begin{pmatrix}-3+2s\\-2-s\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3+2s\\-2-s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(-1)\cdot(-3+2s)+2\cdot(-2-s)\\1\cdot(-3+2s)+0\cdot(-2-s)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1-4s\\-3+2s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-4s\\-2+2s\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Bildgerade hat also die Gleichung

$h' \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$

LAGEBEZIEHUNG ZWISCHEN h UND h' BESTIMMEN

Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Daher verlaufen die Geraden parallel. Des Weiteren stimmen die Aufpunkte überein. Also ist $h = h'$.

c)

1. α(0|4) BESTIMMEN

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Bildpunkt hat die Koordinaten $P'(6|1)$.

2. UND 3. FIXPUNKTE BESTIMMEN

Gesucht sind alle Fixpunkte der Abbildung α. Dazu ist die Gleichung $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ zu lösen, wobei

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 - 2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir das lineare Gleichungssystem

I: $-x_1 + 2x_2 - 2 = x_1 \Leftrightarrow -2 = 2x_1 - 2x_2 \Leftrightarrow -1 = x_1 - x_2$
II: $x_1 + 1 = x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = -1$

Die zwei Gleichungen sind äquivalent zur Gleichung von k. Sie werden also nur von den Punkten auf dieser Geraden erfüllt.

ERGEBNIS

Alle Punkte der Gerade k werden auf sich selbst abgebildet, denn sie erfüllen die Gleichungen I und II. Alle anderen Punkte erfüllen weder I noch II, also werden sie nicht auf sich selbst abgebildet.

4. GERADEN DURCH PUNKT UND BILDPUNKT VERGLEICHEN

Wie oben berechnet ist der Bildpunkt von $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ gegeben durch $\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 + 2a_2 - 2 \\ a_1 + 1 \end{pmatrix}$. Die Gerade durch Punkt und Bildpunkt ist daher

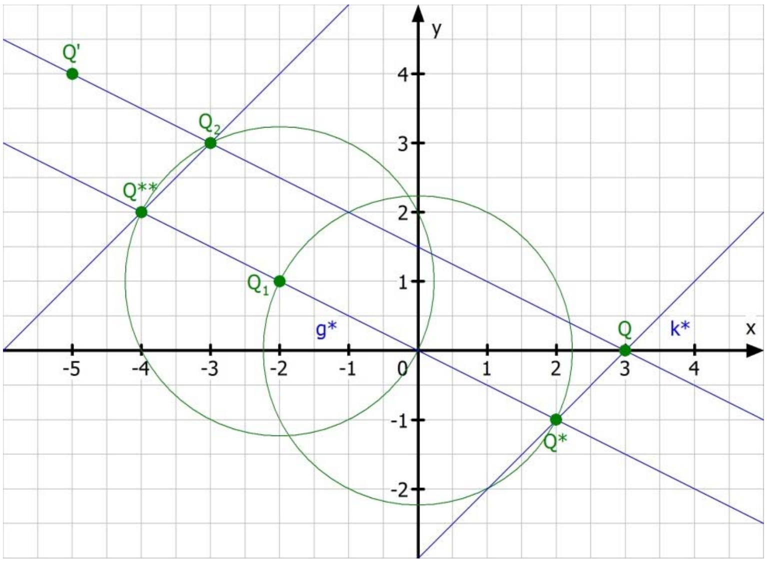
$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} -a_1 + 2a_2 - 2 \\ a_1 + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2a_1 + 2a_2 - 2 \\ a_1 - a_2 + 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot (a_1 - a_2 + 1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle diese Geraden haben als Richtungsvektor ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, sind also parallel zueinander, insbesondere also parallel zu PP' (dies ist der Spezialfall $a_1 = 0, a_2 = 4$).

d)

KONSTRUKTION VON Q' ERLÄUTERN

Die gesamte Konstruktion mit Zirkel und Lineal ergibt folgendes Bild:



$k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ ist eine Gleichung für k in Parameterform, d. h. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der in Teilaufgabe c) 3. bestimmten Fixpunktgerade. Dieser Richtungsvektor ist aufgrund der Fixpunkteigenschaft ein Eigenvektor der Matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1. Aus Teilaufgabe c) 4. folgt, dass der Verschiebungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch ein Eigenvektor der Matrix M ist. Um den zugehörigen Eigenwert zu finden, berechnen wir $M \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und stellen fest, dass der Eigenwert -2 ist.

Somit lässt sich Q' folgendermaßen konstruieren:

Zunächst werden in einem kartesischen Koordinatensystem der Punkt $Q(3|0)$ und die Gerade parallel zu k durch Q eingezeichnet (Bezeichnung: k^*). Dann kommt die Ursprungsgerade g^* hinzu, deren Richtungsvektor der Eigenvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ von M ist (z. B. als Ursprungsgerade parallel zu PP'). Es sei Q^* der Schnittpunkt von g^* und k^*, also $Q^*(2|-1)$. Dann ist $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ^*} + \overrightarrow{Q^*Q}$, wobei $\overrightarrow{OQ^*}$ Eigenvektor von M zum Eigenwert -2 und $\overrightarrow{Q^*Q}$ Eigenvektor von M zum Eigenwert 1 ist. Durch M wird also $\overrightarrow{OQ^*}$ um den Faktor 2 gestreckt und am Ursprung gespiegelt; der so entstehende Punkt heiße Q^{**}. Der Punkt Q^{**} kann geometrisch wie folgt konstruiert werden: Mit dem Zirkel wird ein Kreis um den Ursprung gezeichnet, der den Punkt Q^* enthält (d. h. der Abstand von O zu Q^* wird mit dem Zirkel abgetragen). Der zweite Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden g^* (neben Q^*) ist $Q_1(-2|1)$. Zeichnet man nun einen Kreis mit demselben Radius um Q_1, so gibt es wieder zwei Schnittpunkte mit g^*: eine davon ist der Ursprung und der andere ist $Q^{**}(-4|2)$.

Damit ist die Streckung und Spiegelung von $\overrightarrow{OQ^*}$ erledigt und der Anteil $\overrightarrow{Q^*Q}$ von $\overrightarrow{OQ}$ muss noch addiert werden. Dazu zeichnet man die Gerade parallel zu g^* durch Q ein, ebenso die Gerade parallel zu k^* durch Q^{**}. Der Schittpunkt dieser zwei Geraden ist $Q_2(-3|3)$.

Jetzt muss nur noch der Verschiebungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu Q_2 addiert werden, um $Q'(-5|4)$ zu erhalten.