Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 4: Analytische Geometrie (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2013

Aufgabe 4

a)

(1) SEITENLÄNGEN BERECHNEN

Die Seitenlängen sind die Abstände der Eckpunkte voneinander:

$$d(A,C) = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}|$$
$$= \left|\begin{pmatrix}31\\12\\14\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}30\\10\\16\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$d(B,C) = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|$$
$$= \left|\begin{pmatrix}31\\12\\14\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}32\\11\\18\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|$$
$$= \left|\begin{pmatrix}32\\11\\18\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}30\\10\\16\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

ERGEBNIS

Die Seitenlängen des Dreiecks betragen:

$\overline{AC} = 3$ dm,
$\overline{BC} = 3\sqrt{2}$ dm und
$\overline{AB} = 3$ dm.

(2) POSITION DES RECHTEN WINKELS UND FLÄCHENINHALT BESTIMMEN

Der rechte Winkel liegt gegenüber der längsten Seite, also gegenüber BC. Somit handelt es sich um $\sphericalangle BAC$ an der Ecke A.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich mit

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

mit g = Grundseite, h = Höhe des Dreiecks.

Bei einem rechtwinkligen Dreieck kann man eine der Katheten als Grundseite, die andere als Höhe wählen, z. B.:

$$g = \overline{AC};\ h = \overline{AB}$$

Damit folgt:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

ERGEBNIS

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt 4,5 dm^2.

b)

VORÜBERLEGUNGEN

Die Eckpunkte des Schattens A', B' und C' liegen auf den Verlängerungen der Geraden, die sich zwischen der Lichtquelle L und den Eckpunkten A, B, und C des Pappdreiecks erstrecken.

Da der Schatten auf der Leinwand liegt und die Leinwand in der x_2x_3-Ebene, sind die Eckpunkte A', B' und C' des Schattendreiecks die Schnittpunkte der drei genannten Geraden mit der x_2x_3-Ebene.

Zunächst müssen die Gleichungen der Geraden, auf denen die Lichtquelle und je ein Eckpunkt des Pappdreiecks liegen, ermittelt werden.

GERADENGLEICHUNGEN AUFSTELLEN

Für die Gerade durch L und A wählen wir den Aufpunkt L und den Richtungsvektor $\overrightarrow{LA}$. Somit ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} g_{L,A}\colon \vec{x} &= \overrightarrow{OL} + r \cdot \overrightarrow{LA} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OL}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 30-40 \\ 10-10 \\ 16-18 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Gerade durch L und B wählen wir den Aufpunkt L und den Richtungsvektor $\overrightarrow{LB}$. Somit ergibt sich die Gleichung

$$g_{L,B}: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OL}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 32-40 \\ 11-10 \\ 18-18 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Gerade durch L und C wählen wir den Aufpunkt L und den Richtungsvektor $\overrightarrow{LC}$. Somit ergibt sich die Gleichung

$$g_{L,C}: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OL}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 31-40 \\ 12-10 \\ 14-18 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

KOORDINATEN DER ECKPUNKTE BERECHNEN

Die Eckpunkte des Schattens sind die Schnittpunkte der Geraden $g_{L,A}$, $g_{L,B}$ und $g_{L,C}$ mit der x_2x_3-Ebene. Letztere hat die Gleichung $x_1 = 0$. Von jeder Gerade muss also die erste Komponente null gesetzt werden.

bei $g_{L,A}$: $40 - 10r = 0 \Leftrightarrow r = 4$

Einsetzen in die Geradengleichung liefert

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \Longrightarrow A'(0|10|10).$$

bei $g_{L,B}$: $40 - 8r = 0 \Leftrightarrow r = 5$

Einsetzen in die Geradengleichung liefert

$$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix} \Longrightarrow B'(0|15|18).$$

bei $g_{L,C}$: $40 - 9r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{40}{9}$

Einsetzen in die Geradengleichung liefert

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + \frac{40}{9} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 180-180 \\ 45+40 \\ 81-80 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 85 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow C'\left(0 \left| \frac{170}{9} \right| \frac{2}{9}\right).$$

ERGEBNIS

Die Eckpunkte des Schattendreiecks haben die Koordinaten

$A'(0|10|10)$, $B'(0|15|18)$ und $C'\left(0 \left| \frac{170}{9} \right| \frac{2}{9}\right)$.

c)

ORTHOGONALITÄT PRÜFEN

Zu zeigen ist, dass die Dreieckseiten $\overline{A'C'}$ und $\overline{B'A'}$ keinen rechten Winkel bilden, d. h. $\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'A'} \neq 0$. Dabei ist

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{170}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ \frac{170}{9} - 10 \\ \frac{2}{9} - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{80}{9} \\ -\frac{88}{9} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 10-15 \\ 10-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'C'} \circ \overrightarrow{B'A'} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{80}{9} \\ -\frac{88}{9} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix} \\ &= 0 \cdot 0 + \frac{80}{9} \cdot (-5) + \left(-\frac{88}{9}\right) \cdot (-8) \\ &= 0 - \frac{400}{9} + \frac{704}{9} \neq 0. \end{aligned}$$

Damit stehen die beiden Dreieckseiten $\overline{A'C'}$ und $\overline{B'A'}$ nicht senkrecht aufeinander.

ERGEBNIS

Das Schattendreieck hat in A' keinen rechten Winkel.

d)

(1) PYRAMIDENVOLUMEN ERMITTELN

Das Volumen einer Pyramide ergibt sich zu:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_P \cdot h_P,$$

mit A_P = Grundfläche, h_P = Höhe der Pyramide.

Der Flächeninhalt der Grundfläche $A'B'C'$ ist mit 60 dm² gegeben. Die Höhe der Pyramide ist der senkrechte Abstand zwischen der Grundfläche und der Pyramidenspitze L.

BESTIMMUNG DER HÖHE DER PYRAMIDE

Die Grundfläche der Pyramide liegt in der x_2x_3-Ebene. Die Höhe der Pyramide ist somit die x_1-Koordinate der Spitze L, also 40 dm.

PYRAMIDENVOLUMEN

Das Volumen der Pyramide ist damit:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_P \cdot h_P = \frac{1}{3} \cdot 60\ \text{dm}^2 \cdot 40\ \text{dm} = 800\ \text{dm}^3.$$

(2) GLEICHUNGEN FÜR E_{ABC}, $\vec{n}$ UND l

EBENENGLEICHUNG FÜR E_{ABC}

Allgemein lautet die Parameterform einer Ebene:

$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R},$

wobei $\vec{a}$ ein Stützvektor und $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Spannvektoren der Ebene sind.

Wir setzen

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Als Spannvektoren eignen sich die beiden Dreieckseiten, die am Eckpunkt A anliegen, also $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, wie sie in Teilaufgabe a) (1) berechnet wurden:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Ebenengleichung lautet somit

$$E_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

NORMALENVEKTOR BESTIMMEN

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ soll senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$ stehen, d. h., es muss $\vec{n} \circ \vec{u} = \vec{n} \circ \vec{v} = 0$ gelten. Dabei ist

$$\vec{n} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = n_1 \cdot 2 + n_2 \cdot 1 + n_3 \cdot 2 \text{ und}$$

$$\vec{n} \circ \vec{v} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot (-2).$$

Das führt auf ein Gleichungssystem von 2 Gleichungen für 3 Unbekannte:

I: $n_1 + 2n_2 - 2n_3 = 0$

II: $2n_1 + n_2 + 2n_3 = 0$

Eine der Koordinaten des Normalenvektors kann daher frei gewählt werden (nur nicht gleich null), bspw. $n_1 = 1$.

Damit wird das Gleichungssystem zu:

I': $1 + 2n_2 - 2n_3 = 0 \Longrightarrow (*)\; n_2 = n_3 - \frac{1}{2}$

II': $2 + n_2 + 2n_3 = 0$

$(*)$ in II' eingesetzt liefert

$2 + n_3 - \frac{1}{2} + 2n_3 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + 3n_3 = 0 \Leftrightarrow (**)\; n_3 = -\frac{1}{2}$.

$(**)$ in $(*)$ eingesetzt liefert

$n_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$.

Somit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Um mit möglichst wenigen Vorzeichen und Brüchen weiter rechnen zu können, empfiehlt sich der einfachere Normalenvektor $-2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Fortan soll dieser mit $\vec{n}$ bezeichnet werden.

GERADE l BESTIMMEN

Als Aufpunkt wählen wir L und als Richtungsvektor $\vec{n}$. Damit ist gewährleistet, dass die Gerade durch den Punkt L verläuft und senkrecht auf E_{ABC} steht.

Parametergleichung:

$$l: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

(3) SCHNITTPUNKT *F* UND ABSTAND VON *L* ZU *F* BESTIMMEN

SCHITTPUNKT *F* FINDEN

Die Gleichungen der Geraden l und der Ebene E_{ABC} wurden oben bereits in Parameterform ermittelt:

$E_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und

$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen ergibt ein Gleichungssystem für die Parameter r, s und t:

$$\begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

I: $40-2t=30+2r+s \Leftrightarrow 2r+s+2t=10$

II: $10+2t=10+r+2s \Leftrightarrow r+2s-2t=0$

III: $18+t=16+2r-2s \Leftrightarrow 2r-2s-t=2$

In Matrixschreibweise lautet die zugehörige Gleichung

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r\\ s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 0\\ 2\end{pmatrix}.$$

Bestimmung der inversen Matrix mittel Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -6 & -1 & 2 & 0\\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -6 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -9 & -2 & 2 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -6 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -2/9 & -1/9\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1/3 & 2/3 & -2/3\\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -2/9 & -1/9\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/9 & 2/9 & -2/9\\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -2/9 & -1/9\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 4 & 10/9 & -7/9 & -2/9\\ 0 & 1 & 0 & 1/9 & 2/9 & -2/9\\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -2/9 & -1/9\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2/9 & 1/9 & 2/9\\ 0 & 1 & 0 & 1/9 & 2/9 & -2/9\\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -2/9 & -1/9\end{array}\right)$$

Damit ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix}r\\ s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/9 & 1/9 & 2/9\\ 1/9 & 2/9 & -2/9\\ 2/9 & -2/9 & -1/9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\ 0\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8/3\\ -1/3\\ 2\end{pmatrix}.$$

Einsetzen von $t=2$ in die Geradengleichung von l liefert den Ortsvektor von F, nämlich

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 14 \\ 20 \end{pmatrix} \Longrightarrow F(36|14|20).$$

ABSTAND VON *L* ZU *F* BERECHNEN

Der gesuchte Abstand ist

$$\begin{aligned} d(L,F) &= \left|\overrightarrow{LF}\right| = \left|\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OL}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 36 \\ 14 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Der Abstand zwischen L und F beträgt 6 dm.

(4) VOLUMEN DES SCHATTENRAUMS BESTIMMEN

V_1 sei das Volumen der großen Pyramide mit Grundfläche $A'B'C'$ und Spitze L. Nach Teilaufgabe d) (1) ist $V_1 = 800\ \text{dm}^3$.

Sei V_2 das Volumen der kleinen Pyramide mit Grundfläche ABC und Spitze L. Die Grundfläche dieser Pyramide ist nach Teilaufgabe a) (2) 4,5 dm^2. Ihre Höhe ist der Abstand der Spitze L zur Grundfläche. Die kürzeste Verbindung von L zur Grundfläche ist entlang der Lotgeraden l, die im Punkt F die Grundfläche schneidet. Also ist die Höhe h_2 der Pyramide $ABCL$ gegeben durch

$$h_2 = d(L, E_{ABC}) = d(L,F) = 6\ [\text{dm}].$$

Somit ist $V_2 = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot 4{,}5\ \text{dm}^2 \cdot 6\ \text{dm} = 9\ \text{dm}^3$.

Das Volumen des Schattenraums ist die Differenz der Volumina der beiden Pyramiden, also

$$V = V_1 - V_2 = 800\ \text{dm}^3 - 9\ \text{dm}^3 = 791\ \text{dm}^3.$$