

Aufgabe 2: Analysis (WTR)

Abitur Mathematik: Originalprüfung

**Aufgabe 2:
Analysis (WTR)**

Nordrhein-Westfalen 2013 GK

NOTIZEN

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Aufgabe 2

In einen BMX-Parcours wird eine Sprungschanze eingebaut, deren seitliches Profil durch den Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{50}x^3 + \frac{3}{4}x, -8 \leq x \leq 0, {}^1$$

gegeben ist. Dabei werden sowohl x als auch $f(x)$ als Maßzahlen zur Einheit 1 Meter aufgefasst. Der Funktionsgraph von f ist in *Abbildung 1* dargestellt.

Die Sprungschanze wird ausgehend vom Startpunkt S von links nach rechts durchfahren und so eingebaut, dass der Absprungpunkt $A(0|0)$ auf dem Niveau des Erdbodens liegt, das in der Seitenansicht durch die x -Achse festgelegt ist.

¹ Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, wird aber nur für $-8 \leq x \leq 0$ zur Modellierung verwendet.

Aufgabe 2: Analysis (WTR)

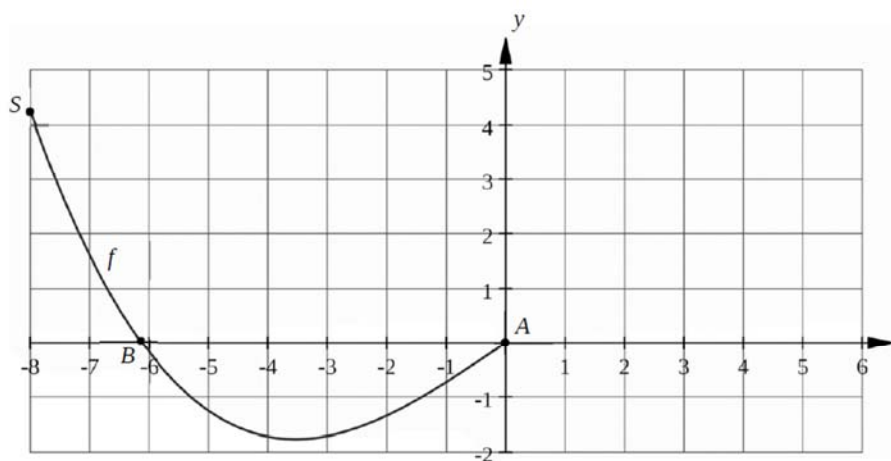


Abbildung 1

NOTIZEN

a)

- (1) Berechnen Sie die Höhe y_S des Startpunktes $S(-8|y_S)$ über dem Erdboden.
- (2) Der Funktionsgraph von f schneidet die x -Achse im Punkt $A(0|0)$ und in einem weiteren Punkt B .
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes B .
[Zur Kontrolle: $B\left(-\frac{5}{2}\sqrt{6}|0\right)$]
- (3) Die durchschnittliche Steigung der Sprungschanze zwischen dem Startpunkt S und dem Absprungpunkt A wird mit $-0,53$ angegeben. Prüfen Sie diese Angabe und zeigen Sie, dass der angegebene Durchschnittswert auch als Steigung in einem Punkt C des Sprungschancen-Profiles vorkommt.
Erklären Sie, warum der angegebene Durchschnittswert der Steigung nur wenig über den Verlauf der Sprungschanze aussagt.

(16 Punkte)

b)

- (1) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des tiefsten Punktes T des Sprungschancen-Profiles.
- (2) Berechnen Sie den Winkel gegen die Horizontale, unter dem die BMX-Fahrer im Punkt A die Schanze tangential verlassen. (12 Punkte)

Aufgabe 2: Analysis (WTR)

c) In dem Bereich, in dem das Profil der Sprungschanze unterhalb des Niveaus des Erdbodens verläuft, muss Erde ausgehoben werden.

- (1) Geben Sie eine Gleichung einer Stammfunktion F der Funktion f an.
- (2) Berechnen Sie, wie groß das Erdvolumen ist, das bis zur Profillinie der Sprungschanze ausgehoben werden muss, wenn die Sprungschanze 2 Meter breit ist. (8 Punkte)

d) Um den BMX-Fahrern nach dem Sprung eine weichere Landung zu ermöglichen, soll rechts vom Punkt A im Bereich $0 \leq x \leq 5$ ein Aufsprunghügel angelegt werden, dessen seitliches Profil durch den Graphen der ganzrationalen Funktion 3. Grades h zu modellieren ist. Dieses soll im Punkt A ohne Knick an das Profil der Sprungschanze anschließen und im Punkt $D(5|0)$ ebenfalls ohne Knick in die waagrechte Erdoberfläche übergehen.

- (1) Geben Sie die Bedingung an, die die Funktion h erfüllen muss, und leiten Sie daraus eine Gleichung dieser Funktion h her (siehe Abbildung 2).

[zur Kontrolle:

$$h(x) = \frac{3}{100}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{4}x]$$

- (2) Bestimmen Sie die Stelle, an der der durch den Graphen der Funktion h modellierte Aufsprunghügel die betragsmäßig größte Steigung hat. (14 Punkte)

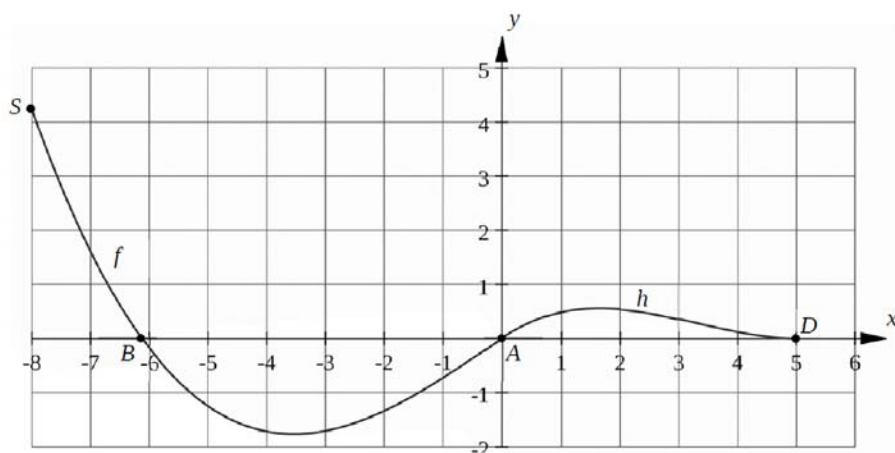


Abbildung 2

NOTIZEN