Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 3: Analysis (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2013

Aufgabe 3

a)

(1) NULLSTELLEN BERECHNEN

Nullstellen werden wie folgt berechnet

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \overset{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 \cdot (x+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ oder } x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = -3$$

(2) EXTREMPUNKTE UND WENDEPUNKTE BESTIMMEN

ABLEITUNGEN BILDEN

Wendestellen werden mit dem hinreichenden Kriterium $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ nachgewiesen. Dazu brauchen wir die ersten drei Ableitungen von f.

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$
$$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2x = 3x^2 + 6x$$
$$\Rightarrow f''(x) = 3 \cdot 2x + 6 = 6x + 6$$
$$\Rightarrow f'''(x) = 6$$

DIE 1. ABLEITUNG GLEICH NULL SETZEN

Notwendige Bedingung für eine Extremalstelle bei $x = x_0$: $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x \cdot (x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x = 0 \text{ oder } x + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = -2$$

DIE 2. ABLEITUNG AN DEN NULLSTELLEN VON f' BERECHNEN

Hinreichende Bedingung für eine Extremalstelle bei $x = x_0$:
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ (Maximalstelle falls $f''(x_0) < 0$ und Minimalstelle falls $f''(x_0) > 0$).

$f''(0) = 6 > 0 \Longrightarrow$ Tiefpunkt bei $x = 0$,

$f''(-2) = -6 < 0 \Longrightarrow$ Hochpunkt bei $x = -2$.

FUNKTIONSWERTE AN DEN EXTREMALSTELLEN BERECHNEN

$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0$

$f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = -8 + 12 = 4$

ERGEBNIS

Der Tiefpunkt hat die Koordinaten $T(0|0)$, der Hochpunkt die Koordinaten $H(-2|4)$.

WENDESTELLE BERECHNEN

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt bei $x = x_0$: $f''(x_0) = 0$.

$$f''(x) = 6x + 6 \overset{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1$$

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt bei $x = x_0$: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.
Im vorliegenden Fall ist

$f'''(-1) = 6 \neq 0$.

Somit ist bei $x = -1$ eine Wendestelle von f.

FUNKTIONSWERT AN DER WENDESTELLE BERECHNEN

$f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 = -1 + 3 = 2$

ERGEBNIS

Der Wendepunkt hat die Koordinaten $W(-1|2)$.

b)

(1) NEUEN FUNKTIONSTERM BESTIMMEN

VERSCHIEBUNG DES GRAPHEN BERECHNEN

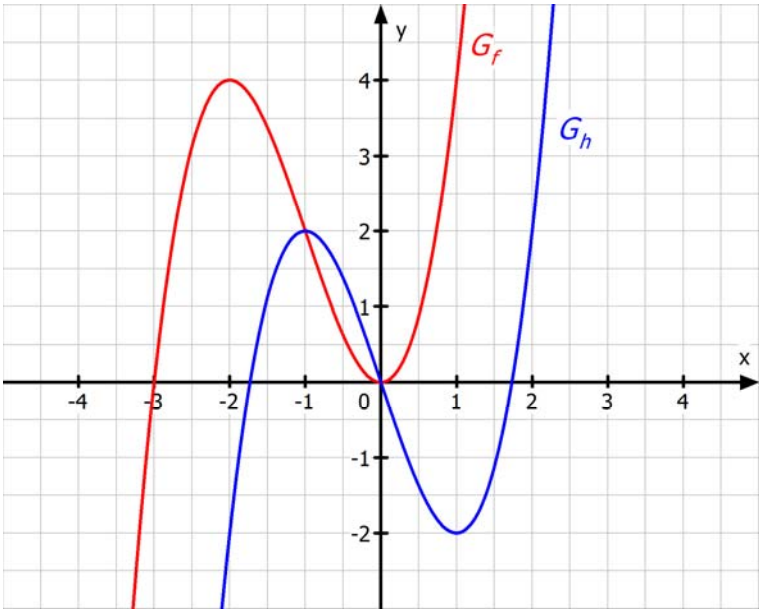
Die Verschiebung des Wendepunkts $W(-1|2)$ auf den Ursprung $O(0|0)$ setzt sich aus einer Verschiebung um 1 LE in positive x-Richtung und einer Verschiebung um 2 LE in negative y-Richtung zusammen.

Im Funktionsterm von f ist daher x durch $x - 1$ zu ersetzen und 2 abzuziehen, um den Funktionsterm $f^*(x)$ des verschobenen Graphen zu erhalten.

Aus der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + 3x^2$ wird in unserem Fall

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(x-1) - 2 \\ &= (x-1)^3 + 3 \cdot (x-1)^2 - 2 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3(x^2 - 2x + 1) - 2 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 - 2 \\ &= x^3 - 3x = h(x). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die gegebene Verschiebung bildet den Graphen der Funktion f auf den Graphen der Funktion h ab.



(2) PUNKTSYMMETRIE BEGRÜNDEN

Der Graph G_f ist genau dann punktsymmetrisch um W, wenn der verschobene Graph G_h punktsymmetrisch um den verschobenen Punkt O ist.

Letzteres ist gewährleistet, denn

$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x)^3 - 3 \cdot (-x) \\ &= -x^3 + 3x \\ &= -(x^3 - 3x) \\ &= -h(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Also ist h punktsymmetrisch zum Ursprung und somit f punktsymmetrisch um W.

c)

(1) FLÄCHE ZWISCHEN *f* UND *h* BERECHNEN

SCHNITTPUNKTE VON G_f UND G_h BERECHNEN

Die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bilden die linke und rechte Grenze der gesuchten Fläche.

$$
\begin{aligned}
& f(x) = h(x) \\
\Leftrightarrow\ & x^3 + 3x^2 = x^3 - 3x \\
\Leftrightarrow\ & 3x^2 = -3x \\
\Leftrightarrow\ & 3x^2 + 3x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 3x \cdot (x+1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 3x = 0 \text{ oder } x + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \text{ oder } x = -1
\end{aligned}
$$

Die Graphen G_f und G_h schneiden sich bei $x = 0$ und $x = -1$.

INTEGRAL AUFSTELLEN UND LÖSEN

Die Fläche zwischen G_f und G_h im Bereich zwischen $x = -1$ und $x = 0$ (wo sich die Graphen schneiden) ist gegeben durch das Integral über die nicht-negative Differenz der beiden Funktionen. Wir müssen daher zuerst ermitteln, ob im Intervall $[-1; 0]$ $f(x) \leq h(x)$ oder $f(x) \geq h(x)$ gilt. Es ist

$$f(x) - h(x) = x^3 + 3x^2 - (x^3 - 3x) = 3x^2 + 3x = 3x \cdot (x+1).$$

Im Integrationsbereich $[-1; 0]$ ist der erste Faktor negativ oder null und der zweite Faktor positiv oder null. Das Produkt ist also nie positiv. Somit ist $f(x) \leq h(x)$ und die Fläche ist

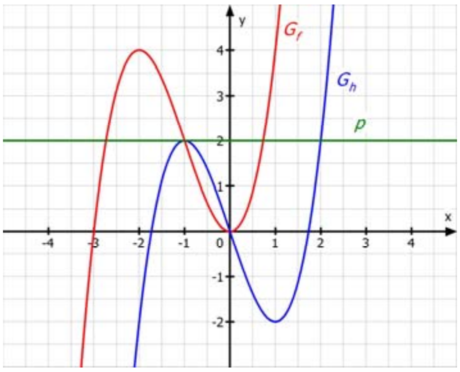
$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \big(h(x) - f(x)\big)dx &= \int_{-1}^{0} (-3x^2 - 3x)dx \\
&= \left[-x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} \\
&= 0 - 0 - \left(1 - \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

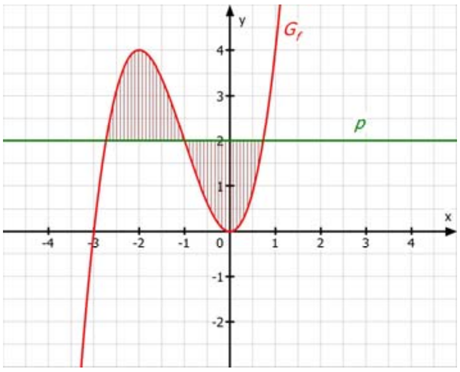
ERGEBNIS

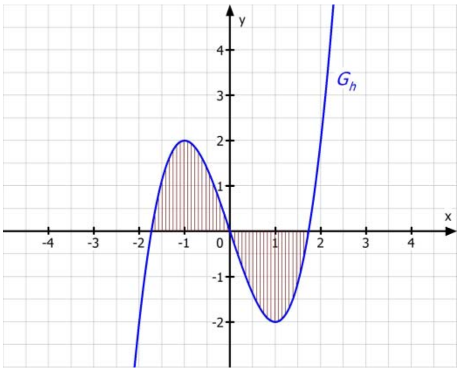
Die Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und h eingeschlossen wird, hat einen Flächeninhalt von 0,5 Flächeneinheiten.

(2) FLÄCHE ZWISCHEN *f* UND *p* BERECHNEN

Bei der Verschiebung in b) (1) wird aus dem Graphen G_f der Graph G_h und aus der Geraden p die x-Achse. Somit ist die Fläche zwischen G_f und p gleich der verschobenen Fläche zwischen G_h und der x-Achse.







Um letztere zu berechnen, brauchen wir die die Schnittstellen von G_h mit der x-Achse, also die Nullstellen von h.

$$h(x) = x^3 - 3x \overset{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x^2 - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = -\sqrt{3} \text{ oder } x = \sqrt{3}$$

Die gesuchte Fläche setzt sich also aus zwei Teilflächen zusammen: die erste von $x = -\sqrt{3}$ bis $x = 0$ und die zweite von $x = 0$ bis $x = \sqrt{3}$. Aufgrund der Punktsymmetrie von G_h zum Ursprung $O(0|0)$ ist die rechte Teilfläche genau so groß wie die linke.

Die linke Teilfläche ist

$$A_1 = \left| \int_{-\sqrt{3}}^{0} h(x)dx \right|, \text{wobei}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{3}}^{0} h(x)dx &= \int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3 - 3x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-\sqrt{3}}^{0} \\ &= 0 - 0 - \left(\frac{1}{4}\cdot 9 - \frac{3}{2}\cdot 3\right) = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} \\ &= \frac{9}{4}\,.\end{aligned}$$

Somit ist $A_1 = \left|\frac{9}{4}\right| = \frac{9}{4}$ und die Gesamtfläche $A = 2 \cdot A_1 = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

ERGEBNIS

Die Fläche, die von G_h und der x-Achse eingeschlossen wird, hat einen Flächeninhalt von 4,5 Flächeneinheiten. Dasselbe gilt also für die Fläche, die von G_f und p eingeschlossen wird.

d)

(1) WENDETANGENTE BERECHNEN

ALLGEMEINE GERADENGLEICHUNG AUFSTELLEN

Die gesuchte Wendetangente ist eine Gerade, besitzt also eine Gleichung der Form

$y = mx + b.$

Um die Parameter m und b zu bestimmen, brauchen wir die Steigung und die Koordinaten eines Punktes auf der Geraden, dazu eignet sich der Wendepunkt.

WENDESTELLE SUCHEN

Hinreichende Bedingung für eine Wendestelle bei $x = x_0$: $f_a''(x_0) = 0$ und $f_a'''(x_0) \neq 0$. Nun ist

$$\begin{aligned}&f_a(x) = x^3 + a \cdot x^2 \\ \Longrightarrow\ &f_a'(x) = 3x^2 + a \cdot 2x = 3x^2 + 2ax \\ \Longrightarrow\ &f_a''(x) = 6x + a \cdot 2 = 6x + 2a \\ \Longrightarrow\ &f_a'''(x) = 6\end{aligned}$$

Nullsetzen der 2. Ableitung liefert:

$$\begin{aligned}&f_a''(x) = 6x + 2a = 0 \\ \Leftrightarrow\ &6x = -2a \\ \Leftrightarrow\ &x = -\frac{a}{3}\,.\end{aligned}$$

Wegen $f_a'''\left(-\frac{a}{3}\right) = 6 \neq 0$ ist bei $x = -\frac{a}{3}$ eine Wendestelle von f_a.

FUNKTIONSWERT AN DER WENDESTELLE BERECHNEN

$$
\begin{aligned}
f_a\left(-\frac{a}{3}\right) &= \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)^2 \\
&= -\frac{a^3}{27} + a\cdot\frac{a^2}{9} \\
&= -\frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{9}a^3 \\
&= \frac{2}{27}a^3
\end{aligned}
$$

Die Steigung der Wendetangente ist gegeben durch die erste Ableitung von f_a an der Wendestelle:

$$
\begin{aligned}
f_a'\left(-\frac{a}{3}\right) &= 3\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + 2a\cdot\left(-\frac{a}{3}\right) \\
&= 3\cdot\frac{a^2}{9} - 2\cdot\frac{a^2}{3} \\
&= \frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2 \\
&= -\frac{1}{3}a^2
\end{aligned}
$$

Somit ist $m = -\frac{1}{3}a^2$ und wir können die Koordinaten des Wendepunktes in die Geradengleichung einsetzen, um den Parameter b zu bestimmen:

$$
\begin{aligned}
& y_W = m\cdot x_W + b \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2}{27}a^3 = -\frac{1}{3}a^2\cdot\left(-\frac{a}{3}\right) + b \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2}{27}a^3 = \frac{a^3}{9} + b \\
\Leftrightarrow\ & b = \frac{2}{27}a^3 - \frac{a^3}{9} = -\frac{1}{27}a^3
\end{aligned}
$$

ERGEBNIS

Die Gleichung der Tangente im Wendepunkt lautet

$$y = -\frac{1}{3}a^2x - \frac{1}{27}a^3.$$

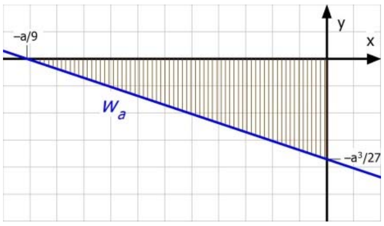
(2) FLÄCHE BERECHNEN

Die gesuchte Fläche wird von drei Geraden begrenzt, ist also ein Dreieck. Die Seitenlängen ergeben sich mit den Achsenabschnitten der Wendetangente.

Der x-Achsenabschnitt ist die Nullstelle der Wendetangente:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{3}a^2x - \frac{1}{27}a^3 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{1}{3}a^2x = \frac{1}{27}a^3 \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{1}{3}a^2x = -\frac{3}{27}a = -\frac{1}{9}a
\end{aligned}
$$

Der y-Achsenabschnitt ist der Parameter t aus der Geradengleichung, also $-\frac{1}{27}a^3$. Wegen $a > 0$ sind beide Achsenabschnitte negativ, d. h. die gesuchte Fläche sieht wie folgt aus:



Wählt man als Grundseite die obere Kante, so ist die Höhe des Dreiecks gerade die Länge der rechten Kante, also $\frac{a^3}{27}$. Somit ist der gesuchte Flächeninhalt A_D gegeben durch

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{9} \cdot \frac{a^3}{27} = \frac{a^4}{486}.$$

ERGEBNIS

Das von der Wendetangente und den Koordinatenachsen eingeschlossene Dreieck hat eine Fläche von $\frac{1}{486}a^4$ Flächeneinheiten.