Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 2: Analysis (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2013

Aufgabe 2

a)

(1) STARTPUNKT BERECHNEN

Der x-Wert des Startpunktes ist mit $x = -8$ gegeben. Der zugehörige y-Wert ist

$$y_S = f(-8) = -\frac{1}{50}(-8)^3 + \frac{3}{4}(-8) = \frac{106}{25} = 4{,}24.$$

Der Startpunkt liegt in 4,24 m Höhe.

(2) SCHNITTPUNKT *B* MIT DER *x*-ACHSE BESTIMMEN

Die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse haben jeweils die y-Koordinate null. Ihre x-Koordinaten sind die Nullstellen der Funktion f. Die Nullstelle bei $x = 0$ ist in der Aufgabenstellung gegeben, gefragt ist nach einer weiteren Nullstelle x_B.

$$\begin{aligned} & f(x) = -\frac{1}{50}x^3 + \frac{3}{4}x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x \cdot \left(-\frac{1}{50}x^2 + \frac{3}{4}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \text{ oder } -\frac{1}{50}x^2 + \frac{3}{4} = 0. \end{aligned}$$

Die Stelle $x = 0$ ist nicht gefragt. Die weiteren Nullstellen ergeben sich wie folgt:

$$-\frac{1}{50}x^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{150}{4}} = \pm\frac{5}{2}\sqrt{6}\,.$$

Die Nullstelle bei $x = \frac{5}{2}\sqrt{6}$ ist auch nicht gefragt, denn die Funktion f wird nur im Bereich $-8 \le x \le 0$ für die Modellierung benutzt. Der gesuchte Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse hat also die Koordinaten $B\left(-\frac{5}{2}\sqrt{6}\middle|0\right)$.

(3) DURCHSCHNITTLICHE STEIGUNG PRÜFEN UND PUNKT *C* FINDEN

Die durchschnittliche Steigung des Graphen von f im Bereich $-8 \leq x \leq 0$ ist der Quotient aus dem Höhenunterschied zwischen Start- und Endpunkt der Schanze und der Länge der Schanze, also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_S}{x_A - x_S} = \frac{0 - 4{,}24}{0 - (-8)} = \frac{-4{,}24}{8} = -0{,}53.$$

Somit ist die Angabe korrekt.

Anhand von Abbildung 1 kann man erkennen, dass die Steigung von f im dargestellten Bereich stetig zunimmt: sie ist zunächst negativ mit Betrag ≈ 2, wird im Tiefpunkt des Graphen null und ist im Punkt A positiv mit kleinem Betrag (< 1).

Zwischen den Punkten S und B ist die durchschnittliche Steigung

$$\frac{y_B - y_S}{x_B - x_S} = \frac{0 - 4{,}24}{-\frac{5}{2}\sqrt{6} - (-8)} = -\frac{4{,}24}{8 - \frac{5}{2}\sqrt{6}} \approx -2{,}3.$$

Somit ist die Steigung im Punkt S kleiner als $-2{,}2$ und im Punkt A größer als null. Da die Ableitung f' stetig ist, nimmt sie nach dem Zwischenwertsatz jeden Wert zwischen $f'(S) < -2{,}3$ und $f'(A) = 0$ an, insbesondere also den Durchschnittswert $-0{,}53$.

Einen Durchschnittswert für die Steigung über das gesamte Intervall anzugeben, ist nicht sinnvoll, weil der Graph einen Tiefpunkt durchläuft, wo die Steigung ihr Vorzeichen von – nach + wechselt. Diese Information geht bei der Angabe des Durchschnittswertes verloren und man kann aus ihr weder das durchschnittliche Gefälle vor dem Tiefpunkt, noch den durchschnittlichen Anstieg nach dem Tiefpunkt ableiten.

b)

(1) KOORDINATEN DES TIEFPUNKTES BERECHNEN

Extremalstellen von f sind Nullstellen von f', die zuerst bestimmt werden. Es ist

$$f'(x) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{50}\right) \cdot x^2 + \frac{3}{4} = -\frac{3}{50} \cdot x^2 + \frac{3}{4}\text{, also}$$

$$\begin{aligned}
& f'(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{3}{50} \cdot x^2 + \frac{3}{4} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3}{50} \cdot x^2 = \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{50}{3} = \frac{25}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{5}{2}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Die Stelle $x = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ liegt nicht im betrachteten Intervall $[-8; 0]$, also kommt nur $x = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$ als Extremstelle in Frage. Wegen

$$f''(x) = 2 \cdot \left(-\frac{3}{50}\right) \cdot x = -\frac{3}{25} \cdot x \text{ ist}$$

$$f''\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{3}{25} \cdot \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{3}{10}\sqrt{2} > 0,$$

also handelt es sich um ein lokales Minimum der Funktion f. Der zugehörige Funktionswert ist

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) &= -\frac{1}{50} \cdot \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^3 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) \\ &= -\frac{1}{50} \cdot \left(-\frac{125}{8} \cdot 2\sqrt{2}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{5}{8}\sqrt{2} - \frac{15}{8}\sqrt{2} \\ &= -\frac{10}{8}\sqrt{2} \\ &= -\frac{5}{4}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Somit hat der Tiefpunkt T des Graphen von f die Koordinaten $T\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\middle| -\frac{5}{4}\sqrt{2}\right)$.

(2) ABSPRUNGWINKEL BERECHNEN

Gefragt ist nach dem Winkel, den die Tangente an f im Punkt A mit der x-Achse einschließt. Dazu wird die Steigung m der Tangente im Punkt A benötigt, die durch den Wert der Ableitung an der entsprechenden Stelle gegeben ist:

$$m = f'(x_A) = f'(0) = \frac{3}{4}.$$

Der gesuchte Winkel ergibt sich aus der Beziehung

$$\tan\alpha = m = \frac{3}{4} \Longrightarrow \alpha \approx 36{,}9\,°.$$

Die BMX-Fahrer verlassen die Schanze tangential unter einem Winkel von etwa 36,9 ° zur Horizontalen.

c)

(1) STAMMFUNKTION ERMITTELN

Da für jedes $a \in \mathbb{N}$ eine Stammfunktion von $x \longmapsto x^a$ durch $x \longmapsto \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$ gegebenen ist, ergibt sich mit Hilfe der Linearität unbestimmter Integrale

$$F(x) = -\frac{1}{200}x^4 + \frac{3}{8}x^2$$

als Stammfunktion für

$f(x) = -\frac{1}{50}x^3 + \frac{3}{4}x.$

(2) AUSZUHEBENDES ERDVOLUMEN BERECHNEN

Das Volumen des ausgehobenen Bodenmaterials berechnet sich als „Querschnittsfläche der Grube mal Breite der Grube“, wobei die Breite der Grube mit der Breite der Sprungschanze übereinstimmt, also 2 m beträgt.

Die Querschnittsfläche der Grube entspricht der Fläche, die der Teil des Graphen mit der x-Achse einschließt, der unterhalb der x-Achse verläuft.

Diese Fläche kann mit einem bestimmten Integral über f bestimmt werden. Da sie aber unterhalb der x-Achse liegt, muss das negative Vorzeichen des Integrals kompensiert werden. Die Integralgrenzen sind die Nullstellen von f, also $-\frac{5}{2}\sqrt{6}$ und 0. Somit ist

$$\begin{aligned}
\text{Fläche} &= -\int_{-\frac{5}{2}\sqrt{6}}^{0} f(x)dx = -\left(F(0) - F\left(-\frac{5}{2}\sqrt{6}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{200}\left(-\frac{5}{2}\sqrt{6}\right)^4 + \frac{3}{8}\left(-\frac{5}{2}\sqrt{6}\right)^2 \\
&= -\frac{625 \cdot 36}{200 \cdot 16} + \frac{3 \cdot 25 \cdot 6}{8 \cdot 4} \\
&= -\frac{25 \cdot 9}{2 \cdot 16} + \frac{25 \cdot 18}{32} = \frac{25}{32}(-9 + 18) = \frac{25 \cdot 9}{32} \\
&= \frac{225}{32} = 7{,}03125\,.
\end{aligned}$$

Da eine Längeneinheit einem Meter entspricht, beträgt die Querschnittsfläche der Grube genau 7,03125 m². Das Volumen des auszuhebenden Bodenmaterials ist also

$V = 7{,}03125\ \mathrm{m}^2 \cdot 2\ \mathrm{m} = 14{,}0625\ \mathrm{m}^3.$

Es müssen also rund 14,1 m³ Erde für den Bau der Schanze ausgehoben werden.

d)

(1) BEDINGUNGEN FÜR *h* ANGEBEN

KNICKFREIER ANSCHLUSS IN *A*

- Der Graph der Funktion geht durch den Punkt $A(0|0)$
  $\Rightarrow h(0) = 0.$
- Der Anschluss von h an f ist knickfrei, d. h. die Steigungen beider Funktionen stimmen in A überein
  $\Rightarrow h'(0) = f'(0).$

KNICKFREIER ANSCHLUSS IN *D*

- Der Graph der Funktion geht durch den Punkt $D(5|0)$
  $\Longrightarrow h(5) = 0.$
- Der Anschluss von h an die x-Achse ist knickfrei, d. h. die Steigung von h in D ist gleich der Steigung der x-Achse, also gleich null
  $\Longrightarrow h'(5) = 0.$

h ALS GANZRATIONALE FUNKTION 3. GRADES

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat einen Funktionsterm der Form $ax^3 + bx^2 + cx + d$ für geeignete Konstanten a, b, c und d. Man setzt also $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und benutzt die obigen Bedingungen, um geeignete Konstanten zu finden.

$h(0) = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0.$

$h'(0) = f'(0) = \frac{3}{4},$

wobei $h'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ist. Die Bedingung lautet also

$0 + 0 + c = \frac{3}{4} \Leftrightarrow c = \frac{3}{4} \Longrightarrow h(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{3}{4}x\,.$

$$\begin{aligned} & h(5) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + \frac{3}{4} \cdot 5 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 125a + 25b + \frac{15}{4} = 0. \\ & h'(5) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3a \cdot 5^2 + 2b \cdot 5 + \frac{3}{4} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 75a + 10b + \frac{3}{4} = 0 \end{aligned}$$

Die Parameter a und b ergeben sich aus dem linearen Gleichungssystem

$\mathrm{I}: 125a + 25b + \frac{15}{4} = 0$

$\mathrm{II}: 75a + 10b + \frac{3}{4} = 0$

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \mathrm{I} - 5 \cdot \mathrm{II}: (250 - 375)a + \frac{30 - 15}{4} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -125a + \frac{15}{4} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a = \frac{15}{4 \cdot 125} = \frac{15}{500} = \frac{3}{100} = 0{,}03 \end{aligned}$$

Einsetzen von $a = \frac{3}{100}$ in I. liefert

$$125 \cdot \frac{3}{100} + 25b + \frac{15}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{5 \cdot 3}{4} + 25b + \frac{15}{4} = 0$$
$$\Leftrightarrow 25b = -\frac{15}{2}$$
$$\Leftrightarrow b = -\frac{15}{50} = -\frac{3}{10} = -0{,}3.$$

Die Gleichung für h lautet demzufolge

$$h(x) = \frac{3}{100}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{4}x.$$

(2) EXTREMWERT DER STEIGUNG BESTIMMEN

Gefragt ist nach der Maximalstelle von $|h'|$ im Intervall $[0; 5]$. Diese ist entweder ein Maximum von h' mit nicht-negativem Wert oder ein Minimum von h' mit negativem Wert. Dabei ist

$$h'(x) = \frac{9}{100} \cdot x^2 - \frac{3}{5} \cdot x + \frac{3}{4},$$

d. h., der Graph von h' ist eine nach oben geöffnete Parabel. Somit gibt es keine lokalen Maxima im offenen Intervall $]0; 5[$, sondern nur das globale Minimum im Scheitelpunkt bei $x = -\frac{-\frac{3}{5}}{2 \cdot \frac{9}{100}} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}$ mit dem Wert

$$h'\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{9}{100} \cdot \frac{100}{9} - \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} + \frac{3}{4}$$
$$= 1 - 2 + \frac{3}{4}$$
$$= -\frac{1}{4}.$$

Das Maximum von h' im Intervall $[0; 5]$ liegt auf dem Rand. Die beiden Randwerte wurden durch die Bedingungen in (1) festgelegt:

$$h'(0) = \frac{3}{4} \text{ oder } h'(5) = 0.$$

Der größte Wert von h' auf $[0; 5]$ ist also $h'(0) = \frac{3}{4}$. Wegen $\left|\frac{3}{4}\right| > \left|-\frac{1}{4}\right|$ ist somit $x = 0$ die Stelle der betragsmäßig größten Steigung des Aufsprunghügels.