Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 1: Analysis (WTR)

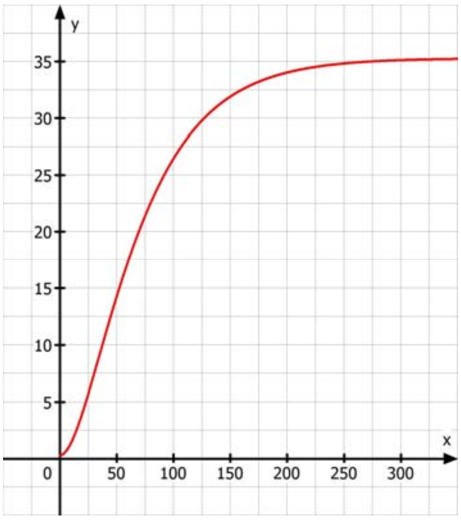
Nordrhein-Westfalen 2013

Aufgabe 1

a)

(1) VERLAUF DES GRAPHEN BESCHREIBEN

Der Graph von f beginnt im Punkt $(0|0{,}3)$ und steigt durchgehend streng monoton an. Im Modell hat also die Buche anfangs die Höhe 0,3 m und wird mit der Zeit immer höher. In der Abbildung ist zu erkennen, dass die Steigung zunächst zunimmt, ab ca. $t = 40$ aber wieder abnimmt. Der Graph flacht nach rechts hin ab und nähert sich einer waagrechten Asymptote zwischen $y = 34$ und $y = 36$. Dementsprechend wächst die Buche im Modell zunächst immer schneller; die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt aber nach etwa 40 Jahren immer weiter ab, während sich die Höhe des Baumes einem festen Wert zwischen 34 m und 36 m nähert.



(2) $f(20)$ BERECHNEN UND ERLÄUTERN

$f(20) = 0{,}3 + 35 \cdot (1 - e^{-0{,}02 \cdot 20})^2 \approx 4{,}1.$

$f(t)$ ist die vom Modell prognostizierte Höhe der Buche in Metern zum Zeitpunkt t (Anzahl der Jahre nach Beobachtungsbeginn). Die Beziehung $f(20) \approx 4{,}1$ besagt also, dass die Buche nach 20 Jahren etwa 4,10 m hoch ist.

(3) BEGRENZTES WACHSTUM BEGRÜNDEN

Der Umstand, dass die Buche nicht höher als 35,30 m wird, wird ausgedrückt durch die Ungleichung $f(t) \leq 35{,}3$ für alle $t \in [0; \infty[$. Diese Ungleichung erhält man wie folgt:

Für alle $t \in [0; \infty[$ gilt $-0{,}02 \cdot t \leq 0$.

Da die Exponentialfunktion streng monoton wächst und stets positive Werte annimmt, folgt

$0 < e^{-0{,}02 \cdot t} \leq e^0 = 1$	multipliziere mit -1
$\Rightarrow 0 > -e^{-0{,}02 \cdot t} \geq -1$	addiere 1
$\Rightarrow 1 > 1 - e^{-0{,}02 \cdot t} \geq 0$	quadriere
$\Rightarrow 1 > (1 - e^{-0{,}02 \cdot t})^2 \geq 0$	multipliziere mit 35
$\Rightarrow 35 > 35 \cdot (1 - e^{-0{,}02 \cdot t})^2 \geq 0$	addiere 0,3
$\Rightarrow 35{,}3 > \underbrace{0{,}3 + 35 \cdot (1 - e^{-0{,}02 \cdot t})^2}_{=f(t)} \geq 0{,}3$	

Somit gilt für alle $t \in [0; \infty[$ die Ungleichung $0{,}3 \leq f(t) < 35{,}3$. Das bedeutet, dass laut Modell die Buche stets kleiner ist als 35,3 m.

b)

PROBLEM VERSTEHEN

Der Zeitpunkt t_1, zu dem die Buche am stärksten wächst, ist die Maximalstelle der Wachstumsgeschwindigkeit, die durch die Ableitung f' von f modelliert wird. Für die Bestimmung dieser Maximalstelle werden die erste und zweite Ableitung von f', also die zweite und dritte Ableitung von f benutzt:

1., 2. UND 3. ABLEITUNG VON *f* BILDEN

$$f(t) = 0{,}3 + 35 \cdot (1 - e^{-0{,}02 \cdot t})^2 = 0{,}3 + 35 \cdot (1 - 2 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} + e^{-0{,}04 \cdot t})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(t) &= 0 + 35 \cdot (0 - 2 \cdot (-0{,}02) \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} + (-0{,}04) \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}) \\ &= 35 \cdot (0{,}04 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} - 0{,}04 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}) \\ &= 35 \cdot 0{,}04 \cdot (e^{-0{,}02 \cdot t} - e^{-0{,}04 \cdot t}) \\ &= 1{,}4 \cdot (e^{-0{,}02 \cdot t} - e^{-0{,}04 \cdot t})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f''(t) &= 1{,}4 \cdot \left((-0{,}02) \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} - (-0{,}04)e^{-0{,}04 \cdot t}\right) \\ &= 0{,}028 \cdot (2e^{-0{,}04 \cdot t} - e^{-0{,}02 \cdot t})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'''(t) = 0{,}028 \cdot (2 \cdot (-0{,}04) \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - (-0{,}02)e^{-0{,}02 \cdot t})$$
$$= 0{,}00056 \cdot (e^{-0{,}02 \cdot t} - 4e^{-0{,}04 \cdot t})$$

MÖGLICHE EXTREMSTELLEN VON f' BERECHNEN

Maximalstellen von f' sind zugleich Nullstellen von f'' und letztere findet man durch folgende Umformungen:

$f''(t) = 0{,}028 \cdot (2e^{-0{,}04 \cdot t} - e^{-0{,}02 \cdot t}) = 0$	durch 0,028 teilen
$\Leftrightarrow 2e^{-0{,}04 \cdot t} - e^{-0{,}02 \cdot t} = 0$	$e^{-0{,}02 \cdot t}$ addieren
$\Leftrightarrow 2e^{-0{,}04 \cdot t} = e^{-0{,}02 \cdot t}$	mit $e^{0{,}04 \cdot t}$ multiplizieren
$\Leftrightarrow 2 = e^{0{,}02 \cdot t}$	logarithmieren
$\Leftrightarrow \ln 2 = 0{,}02 \cdot t$	durch 0,02 teilen
$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{0{,}02} = 50 \ln 2 \approx 34{,}7$	

MÖGLICHE EXTREMSTELLEN VON f' PRÜFEN

Um zu zeigen, dass bei $t = 50 \ln 2$ ein Maximum vorliegt, wird das Vorzeichen von $f'''(50 \ln 2)$ untersucht.

$$\begin{aligned} f'''(50 \ln 2) &= 0{,}00056 \cdot \left(e^{-0{,}02 \cdot 50 \ln 2} - 4e^{-0{,}04 \cdot 50 \ln 2}\right) \\ &= 0{,}00056 \cdot \left(e^{-\ln 2} - 4e^{-2 \ln 2}\right) \\ &= 0{,}00056 \cdot \left(\left(e^{\ln 2}\right)^{-1} - 4\left(e^{\ln 2}\right)^{-2}\right) \\ &= 0{,}00056 \cdot (2^{-1} - 4 \cdot 2^{-2}) \\ &= 0{,}00056 \cdot \left(\frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4}\right) \\ &= 0{,}00056 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -0{,}00028 < 0 \end{aligned}$$

Wegen $f'''(50 \ln 2) < 0$ ist die Nullstelle $t_1 = 50 \ln 2$ von f'' ein lokales Maximum von f'. Da t_1 die einzige Nullstelle von f'' ist, handelt es sich um das einzige lokale Maximum von f', also um das globale Maximum, denn Randmaxima gibt es wegen $f'(0) = 0$ nicht.

Die Buche wächst also nach etwa 34,7 Jahren am schnellsten.

c)

(1) WACHSTUMSGESCHWINDIGKEITEN VERGLEICHEN

Beide Wachstumsgeschwindigkeiten beginnen bei null und steigen zunächst steil an, erreichen bei ca. $t = 40$ ein Maximum von ca. 0,35 m/a (1. Buche) bzw. 0,27 m/a (2. Buche) und nehmen dann wieder ab. Dabei liegt die Wachstumsgeschwindigkeit der ersten Buche stets oberhalb der Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten, denn der Graph von f' verläuft durchgehend oberhalb des Graphen von g'. Der Anstieg der Wachstumsgeschwindigkeit vor Erreichen des Maximums ist bei der ersten Buche schneller, denn der Graph von f' ist in diesem Bereich steiler als der von g'. Ebenso fällt die Wachstumsgeschwindigkeit der ersten Buche nach Erreichen des Maximums schneller ab als die der zweiten Buche.

(2) GLEICHE LAGE DER MAXIMA BEGRÜNDEN

Aus Teilaufgabe b) ist die Wachstumsgeschwindigkeit der 1. Buche bekannt: $f'(t) = 1{,}4 \cdot (e^{-0{,}02 \cdot t} - e^{-0{,}04 \cdot t})$. Ein Vergleich mit der Funktionsgleichung von g' liefert

$$f'(t) = \frac{1{,}4}{1{,}1} \cdot 1{,}1 \cdot (e^{-0{,}02 \cdot t} - e^{-0{,}04 \cdot t}) = \frac{14}{11} g'(t)$$

$$g'(t) = 1{,}1 \cdot (e^{-0{,}02 \cdot t} - e^{-0{,}04 \cdot t}) = \frac{1{,}1}{1{,}4} \cdot 1{,}4 \cdot (e^{-0{,}02 \cdot t} - e^{-0{,}04 \cdot t}) = \frac{11}{14} f'(t).$$

Somit ist aber

$g''(t) = \frac{11}{14} f''(t)$ und

$$g'''(t) = \frac{11}{14} f'''(t).$$

Insbesondere gilt $g''(t) = 0 \Leftrightarrow f''(t) = 0$ und $g'''(t) < 0 \Leftrightarrow f'''(t) < 0$. Deswegen kommt für g' nur die Nullstelle t_1 von f'' als Extremstelle in Frage und diese Stelle ist wegen $g'''(t_1) = \frac{11}{14} f'''(t_1) < 0$ ein Maximum.

(3) HÖHENVERHÄLTNIS BEGRÜNDEN

Der Graph der Wachstumsgeschwindigkeit der ersten Buche liegt im gesamten Intervall $]0; \infty[$ oberhalb des Graphen der Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche. Die erste Buche wächst also während des gesamten Intervalls schneller als die zweite Buche.

Beide Buchen sind bei $t = 0$ mit derselben Höhe 0,3 m gepflanzt worden. Aufgrund des schnelleren Wachstums erreicht die erste Buche zu jedem späteren Zeitpunkt $t > 0$ immer eine größere Höhe als Buche 2.

d)

(1) STAMMFUNKTION NACHWEISEN

Es ist zu zeigen, dass für alle $t \geq 0$ $h'(t) = g'(t)$ ist.

$$h(t) = 27{,}5 \cdot (e^{-0{,}04t} - 2 \cdot e^{-0{,}02t})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow h'(t) &= 27{,}5 \cdot \left((-0{,}04)e^{-0{,}04t} - 2 \cdot (-0{,}02) \cdot e^{-0{,}02t}\right)\\ &= 27{,}5 \cdot 0{,}04 \cdot (e^{-0{,}02t} - e^{-0{,}04t})\\ &= 1{,}1 \cdot (e^{-0{,}02t} - e^{-0{,}04t})\\ &= g'(t).\end{aligned}$$

Somit ist h eine Stammfunktion von g'.

(2) HÖHENUNTERSCHIED NACH 50 JAHREN BESTIMMEN

Die Höhe eines Baumes zum Zeitpunkt t ist die Summe aus der Anfangshöhe und dem Höhenzuwachs bis zum Zeitpunkt t. Letzterer ist das Integral von 0 bis t über die Wachstumsgeschwindigkeit. Für die Höhe g der zweiten Buche gilt also

$$g(t) = 0{,}3 + \int_0^t g'(x)dx = 0{,}3 + [h(x)]_0^t = 0{,}3 + h(t) - h(0),$$

da h eine Stammfunktion von g' ist. Dabei gilt

$$\begin{aligned}h(t) - h(0) &= 27{,}5 \cdot (e^{-0{,}04t} - 2 \cdot e^{-0{,}02t}) - 27{,}5 \cdot (1 - 2)\\ &= 27{,}5 \cdot (e^{-0{,}04t} - 2 \cdot e^{-0{,}02t} + 1)\\ &= 27{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}02t})^2.\end{aligned}$$

Nach Teilaufgabe c) ist stets
$g(t) \leq f(t)$, also ist der Höhenunterschied der beiden Buchen zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$\begin{aligned}f(t) - g(t) &= 0{,}3 + 35 \cdot (1 - e^{-0{,}02 \cdot t})^2 - \left(0{,}3 + h(t) - h(0)\right)\\ &= 35 \cdot (1 - e^{-0{,}02 \cdot t})^2 - 27{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}02t})^2\\ &= 7{,}5(1 - e^{-0{,}02 \cdot t})^2.\end{aligned}$$

Somit ist der Höhenunterschied nach 50 Jahren

$$f(50) - g(50) = 7{,}5(1 - e^{-0{,}02 \cdot 50})^2 = 7{,}5 \cdot (1 - e^{-1})^2 \approx 2{,}997.$$

Die erste Buche ist gemäß der Modellierung nach 50 Jahren um knapp 3 m höher als die zweite Buche. Die Behauptung, dass der Höhenunterschied mindesten 3,50 m betragen muss, ist daher falsch.