Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 7 Stochastik

Nordrhein-Westfalen 2012 LK

Aufgabe a

1. SCHRITT: VERTEILUNG ANGEBEN

Da die Anzahl der Handybesitzer sehr viel größer ist, als die betrachteten Stichproben (höchstens 200), kann näherungsweise davon ausgegangen werden, dass die Anzahl X_n derer, die ein Smartphone besitzen, binomialverteilt ist mit Parametern n (Anzahl der zufällig ausgewählten Handybesitzer) und $p = \frac{1}{6}$ (Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Handybesitzer ein Smartphone hat).

E_1: $n = 100$ $\quad p = \frac{1}{6}$ $\quad k = 15$

E_2: $n = 200$ $\quad p = \frac{1}{6}$ $\quad k \geq 25$

E_3: $n = 200$ $\quad p = \frac{1}{6}$ $\quad 32 \leq k \leq 38$

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITEN ERMITTELN

Beim Ereignis E_1 ist der Stichprobenumfang $n = 100$, bei E_2 und E_3 ist $n = 200$. Mit Hilfe der Bernoulli-Formel und die kumulativen Verteilungstabellen ergibt sich

$$P(\mathrm{E}_1) = P(X_{100} = 15) = \binom{100}{15} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{85} \approx 0{,}1,$$

$$P(\mathrm{E}_2) = P(X_{200} \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \approx 1 - 0{,}0426 = 0{,}9574 \text{ und}$$

$$P(\mathrm{E}_3) = P(32 \leq X \leq 38) = P(X \leq 38) - P(X \leq 31)$$
$$\approx 0{,}8369 - 0{,}3711 = 0{,}4658.$$

Aufgabe b

SITUATION MODELLIEREN

Annahmen:

- Es werden n Geräte unabhängig voneinander kontrolliert.

- Für jede Kontrolle gibt es genau zwei mögliche Ausgänge: „fehlerhaft“ oder „nicht fehlerhaft“.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät fehlerhaft ist, beträgt bei jeder Kontrolle 4 %.

Die Anzahl X der fehlerhaften Geräte ist somit binomialverteilt zu den Parametern n und $p = 0{,}04$.

Gesucht ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$P(X \geq 1) \geq 99$ % gilt. Dabei ist:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^n = 1 - 0{,}96^n$.

Die zu erfüllende Ungleichung lautet also

$1 - 0{,}96^n \geq 0{,}99 \qquad | -0{,}99 \; + 0{,}96^n$

$0{,}96^n \leq 0{,}01 \qquad$ | logarithmieren

$\ln(0{,}96^n) \leq \ln(0{,}01) \qquad$ | Logarithmengesetz anwenden

$n \cdot \ln(0{,}96) \leq \ln(0{,}01) \qquad | : \ln(0{,}96)$

$$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\,(0{,}96)} \approx 112{,}8$$

Die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist 113.

Um mit 99 %iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein fehlerhaftes Gerät zu finden, müssen mindestens 113 Geräte kontrolliert werden.

Aufgabe c

1. SCHRITT: BESCHREIBUNG DER MÖGLICHEN FEHLER

1. Es handelt sich um eine Charge aus der Produktion mit 2 % Ausschuss, bei der Stichprobe findet man aber 6 oder mehr defekte Geräte, so dass man annimmt, dass die Smartphones aus der Produktion vor der Umstellung, also mit 4 % Fehlerquote stammen.

2. Die Smartphones sind mit einer 4 %igen Fehlerquote produziert worden, man findet bei der Stichprobe aber nur 5 oder weniger defekte Geräte, so dass man die Charge der Produktion mit einer Fehlerquote von 2 % zuordnet.

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT BESTIMMEN

Im ersten Fall ist die Anzahl Y der defekten Smartphones binomialverteilt zu den Parametern $n = 200$ und $p = 0{,}02$, aber es tritt das Ereignis $Y \geq 6$ ein. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist laut Verteilungstabelle

$P(Y \geq 6) = 1 - P(Y \leq 5) \approx 1 - 0{,}7867 = 0{,}2133.$

Im zweiten Fall ist die Anzahl Y der defekten Smartphones binomialverteilt zu den Parametern $n = 200$ und $p = 0{,}04$, aber es tritt das Ereignis $Y \leq 5$ ein. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist laut Verteilungstabelle

$P(Y \leq 5) \approx 0{,}1856.$

Aufgabe d (1)

1. SCHRITT: BEZEICHNUNGEN FESTLEGEN

d defekt

$\bar{d}$ nicht defekt

pd vom Prüfgerät als defekt eingestuft

$p\bar{d}$ vom Prüfgerät nicht als defekt eingestuft

2. SCHRITT: BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Smartphone nicht defekt ist, unter der Bedingung, dass es als defekt eingestuft worden ist:

$$P_{pd}(\bar{d}) = \frac{P(pd \cap \bar{d})}{P(pd)},$$

wobei

$$P(pd \cap \bar{d}) = 0{,}98 \cdot 0{,}001 = 0{,}00098$$

und

$$\begin{aligned} P(pd) &= P(d \cap pd) + P(\bar{d} \cap pd) \\ &= 0{,}02 \cdot 0{,}99 + 0{,}98 \cdot 0{,}001 \\ &= 0{,}02078. \end{aligned}$$

Somit ist

$$P_{pd}(\bar{d}) = \frac{0{,}00098}{0{,}02078} \approx 0{,}04716$$

Aufgabe d (2)

Im Schnitt werden $0{,}02 \cdot 0{,}99 = 1{,}98\%$ der Smartphones zurecht aussortiert und jedes davon bringt eine Kostenersparnis von 110 €. Die durchschnittliche Ersparnis pro Smartphone durch rechtmäßiges Aussortieren ist also $1{,}98\% \cdot 110\text{ €} = 2{,}178\text{ €}$.

Im Schnitt werden $0{,}98 \cdot 0{,}001 = 0{,}098\%$ der Smartphones zu Unrecht aussortiert, was jeweils Kosten in Höhe von 100 € verursacht. Die durchschnittlichen Kosten pro Smartphone durch fehlerhaftes

Aussortieren belaufen sich also auf $0{,}098\% \cdot 100\,€ = 0{,}098\,€$.

Insgesamt ist also die durchschnittliche Kostenersparnis pro Smartphone

$2{,}178\,€ - 0{,}098\,€ = 2{,}08\,€$.

Werden n Smartphones produziert, so werden durch den Einsatz des Prüfgeräts $n \cdot 2{,}08\,€$ gespart, also lohnt sich die Anschaffung es Prüfgeräts genau dann, wenn

$n \cdot 2{,}08\,€ > 10.000\,€$, also

$$n > \frac{10.000\,€}{2{,}08\,€} \approx 4807{,}69$$

ist.

Ab einer Anzahl von 4808 produzierten Smartphones lohnt sich die Anschaffung eines Prüfgerätes.

Aufgabe e (1)

(1) 2. SCHRITT: ANNAHME- UND ABLEHNUNGSBEREICH FÜR H_0 FESTLEGEN

Sei X die Anzahl der defekten Smartphones in der Stichprobe. X ist binomialverteilt zu den Parametern p und $n = 1000$.

Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0{,}01$

H_0 soll angenommen werden, wenn höchstens k_0 defekte Smartphones gefunden werden.

Gesucht ist das kleinste $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k_0 \leq 1000$, so dass für jedes $p \leq 0{,}01$ $P(X > k_0) \leq 0{,}05$, also $P(X \leq k_0) \geq 0{,}95$ gewährleistet ist. Die Ungleichung $P(X \leq k_0) \geq 0{,}95$ ist genau dann für jedes $p \leq 0{,}01$ erfüllt, wenn sie für $p = 0{,}01$ gilt, denn $P(X \leq k_0)$ wird umso kleiner, je größer p wird.

Aus Tabelle 6 (kumulierte Binomialverteilung für $n = 1000$, Spalte für $p = 0{,}01$) entnimmt man $P(X \leq 14) \approx 0{,}9176$ und $P(X \leq 15) \approx 0{,}9521$. Somit ist $k_0 = 15$.

Die Entscheidungsregel lautet also wie folgt:

Die Nullhypothese $p \leq 0{,}01$ soll angenommen werden, wenn höchstens 15 defekte Smartphones in der Stichprobe sind. Falls mehr als 15 defekte Smartphones gezählt werden, soll davon ausgegangen werden, dass der Anteil der defekten Smartphones über 0,01 % liegt.

Aufgabe e (2)

Mit der Wahl der Nullhypothese begrenzt der Händler die Wahrscheinlichkeit, den Fehler 1. Art zu begehen, auf maximal 5 %. Der

Fehler 1. Art besteht in diesem Fall darin, dass die Ausschussquote der Smartphones tatsächlich bei maximal einem Prozent liegt, der Händler aber unter den 1000 getesteten Geräten mehr als 15 defekte Geräte findet, und daher der Aussage der Firma keinen Glauben schenkt. Der Händler wollte also das Risiko möglichst gering halten, die Firma zu Unrecht zu verdächtigen, falsche Angaben gemacht zu haben.

Aufgabe e (3)

1. SCHRITT: FEHLERWAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN

Gemäß der Modellierung als Bernoullikette X der Länge $n = 1000$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}02$ errechnet sich die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art zu

$P(X \leq 15) = F(1000; 0{,}02; 15) \approx 0{,}1539 \approx 15{,}4\,\%$.

Aufgabe e (4)

1. Möglichkeit:

Der Händler könnte die Stichprobe vergrößern. Das würde allerdings auch einen höheren Arbeitsaufwand für ihn bedeuten.

2. Möglichkeit:

Der Händler könnte das Signifikanzniveau α erhöhen. Damit würde das Intervall für den Annahmebereich größer und das Intervall für den Ablehnungsbereich kleiner, was die Wahrscheinlichkeit, mit der Stichprobe im Ablehnungsbereich zu landen, verringern würde. Dieses Vorgehen würde aber das Risiko erhöhen, den Fehler 1. Art zu begehen.