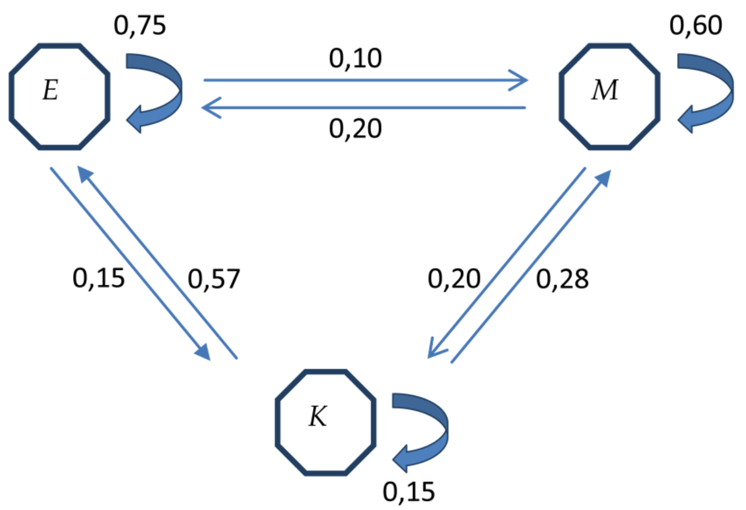
Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 6 Lineare Algebra

Nordrhein-Westfalen 2012 LK

Aufgabe a

1. SCHRITT: ÜBERGANGSDIAGRAMM ZEICHNEN



2. SCHRITT: ÜBERGANGSMATRIX ERSTELLEN

von: / nach:	E	M	K
E	0,75	0,2	0,57
M	0,10	0,6	0,28
K	0,15	0,2	0,15

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

Aufgabe b (1)

1. SCHRITT: MATRIZEN GEGENÜBERSTELLEN

	von: E M K
nach: E, M, K	$A_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix}$

	von: E M K
nach: E, M, K	$A_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

2. SCHRITT: ÄNDERUNGEN ABLESEN

Von den Kunden, die einmal im Jahr einen Urlaub buchen, ist der Anteil derer, die im Folgejahr auf ihren Urlaub verzichten, kleiner geworden. Stattdessen bleiben mehr von ihnen bei einem Urlaub im Jahr.

Von denen, die keinen Urlaub buchen, gehen im Vergleich zu früher mehr im Folgejahr wieder einmal oder mehrmals auf Reisen.

Aufgabe b (2)

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 2624 + 0{,}2 \cdot 1206 + 0{,}6 \cdot 570 \\ 0{,}1 \cdot 2624 + 0{,}6 \cdot 1206 + 0{,}3 \cdot 570 \\ 0{,}1 \cdot 2624 + 0{,}2 \cdot 1206 + 0{,}1 \cdot 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2682{,}4 \\ 1157 \\ 560{,}6 \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2012 buchen etwa 2682 Kunden genau eine Reise und 1157 mehrere Reisen. Etwa 561 Stammkunden melden sich im Jahr 2012 nicht bei dem Reisebüro.

Aufgabe b (3)

1. SCHRITT: VERTEILUNG FÜR DAS JAHR 2010 BESTIMMEN

Gesucht ist der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

I: $0{,}8x + 0{,}2y + 0{,}6z = 2624$
II: $0{,}1x + 0{,}6y + 0{,}3z = 1206$
III: $0{,}1x + 0{,}2y + 0{,}1z = 570$

$\text{II} - 3 \cdot \text{III}: -0{,}2x = -504 \Longrightarrow x = \frac{504}{0{,}2} = 2520.$

$\text{I} - 2 \cdot \text{II}: 0{,}6x - y = 212$

$\Longrightarrow x_2 = 0{,}6x - 12 = 0{,}6 \cdot 2520 - 212 = 1300.$

$\text{II} - \text{III}: 0{,}4y + 0{,}2z = 636$

$\Longrightarrow z = 5 \cdot 636 - 5 \cdot 0{,}4y = 3180 - 2y = 3180 - 2 \cdot 1300 = 580.$

Im Jahr 2010 buchten 2520 Stammkunden genau eine, 1300 mehrere und 580 keine Reise.

Aufgabe c (1)

Das Buchungsverhalten der Kunden der Gruppen E und M bleibt unverändert, das heißt, die Spalten unter E und unter M bleiben ebenfalls unverändert.

Wir bezeichnen den Anteil der Gruppe K, der zu E wechselt mit q, $q \geq 0$. Das ist der Eintrag b_{13} der Matrix B. Da genau 5 % der Kunden in Gruppe K im Folgejahr wieder keinen Urlaub buchen, ist der Eintrag b_{33} der Übergangsmatrix gleich 0,05. Da jeder der Kunden aus K im Folgejahr in genau einem der Gruppen E, M und K landet, addieren sich die entsprechenden Anteile zu 1, d. h. $b_{13} + b_{23} + b_{33} = q + b_{23} + 0{,}05 = 1$. Daraus folgt $b_{23} = 0{,}95 - q$ und wegen $b_{23} \geq 0$ ist $q \leq 0{,}95$.

Somit ergibt sich die angegebene Übergangsmatrix B.

Aufgabe c (2)

1. SCHRITT: GLEICHUNG AUFSTELLEN

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95 - q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2699 \\ M \\ K \end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: q BERECHNEN

Die erste Koordinate des Produktes errechnet sich wie folgt:

$0{,}8 \cdot 2624 + 0{,}2 \cdot 1206 + 570 \cdot q = 2699$

$$\Longrightarrow q = \frac{2699 - 0{,}8 \cdot 2624 - 0{,}2 \cdot 1206}{570} = \frac{358{,}6}{570} \approx 0{,}63.$$

Aufgabe c (3)

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95-q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ M \\ K \end{pmatrix}$$

$2340{,}4 + 570q = E$

$1527{,}5 - 570q = M$

Die Anzahl Z der Buchungen im Jahr 2012 ist dann

$Z = E + \mu \cdot M$, wobei μ die durchschnittliche Anzahl der Buchungen von Kunden der Gruppe M ist. Nach Definition von M ist $\mu \geq 2$, also ist

$$\begin{aligned} Z &= E + \mu \cdot M \\ &\geq E + 2 \cdot M \\ &= 2340{,}4 + 570q + 2 \cdot (1527{,}5 - 570q) \\ &= 5395{,}4 - 570q \\ &\geq 5395{,}4 - 570 \cdot 0{,}95 \\ &= 4853{,}9, \end{aligned}$$

da $q \leq 0{,}95$ ist (s.o.).

Das Reisebüro kann demnach mit mindestens 4853 Buchungen rechnen.

Aufgabe d (1)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ (altes Berechnungsmodell)}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (neues Berechnungsmodell)}$$

1. Aspekt:

Im neuen Modell gibt es keinen Übergang von K nach K mehr, da der entsprechende Eintrag der Übergangsmatrix null ist. Das könnte entweder bedeuten, dass alle Kunden, die im Vorjahr keine Reise gebucht haben, z.B. durch spezielle Erinnerungsschreiben dazu gebracht werden, im laufenden Jahr mindestens eine Reise zu buchen, oder, was wahrscheinlicher ist, dass die Kunden, die zwei Jahre hintereinander keine Reise gebucht haben, einfach aus der Kartei der Stammkundschaft herausgenommen werden.

2. Aspekt:

Außerdem wird der Vektor $\begin{pmatrix} 45 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ addiert. Das bedeutet, dass 45 Kunden, die im laufenden Jahr genau eine Reise und 12 Kunden, die mehrere Reisen buchen, neu in die Kartei der Stammkunden aufgenommen werden.

Aufgabe d (2)

1. SCHRITT: LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM AUFSTELLEN

Gesucht ist der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & -0{,}2x + 0{,}2y + 0{,}6z = -45 \\ \text{II:} & 0{,}1x - 0{,}4y + 0{,}3z = -12 \\ \text{III:} & 0{,}1x + 0{,}2y \qquad - z = 0. \end{array}$$

2. SCHRITT: LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM LÖSEN

$\text{I} + 2 \cdot \text{II}: \ -0{,}6y + 1{,}2z = -69$

$\text{III} - \text{II}: 0{,}6y - 1{,}3z = 12$

Addition der letzten zwei Gleichungen liefert

$-0{,}1z = -57 \Leftrightarrow z = 570.$

Dies in $\text{III} - \text{II}: 0{,}6y - 1{,}3z = 12$ eingesetzt liefert

$$0{,}6y - 1{,}3 \cdot 570 = 12 \Leftrightarrow y = \frac{12 + 1{,}3 \cdot 570}{0{,}6} = 1255.$$

Setzt man $y = 1255$ und $z = 570$ in III ein, so ergibt sich

$$0{,}1x + 0{,}2 \cdot 1255 - 570 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{570 - 0{,}2 \cdot 1255}{0{,}1} = 3190.$$

Die stationäre Verteilung besteht aus 3190 Kunden der Gruppe E, 1255 Kunden der Gruppe M und 570 Kunden der Gruppe K.

4. SCHRITT: ERKLÄRUNG

Die 10 % der 570 Kunden, die aus der Kartei gestrichen werden, weil sie zwei Jahre in Folge keinen Urlaub gebucht haben (das sind 57), werden durch die $45 + 12 = 57$ neu aufgenommenen Kunden der Gruppen E und M ausgeglichen. Somit bleibt die Zahl der Kunden in der Kartei konstant.

Bemerkung:
Die Frage war viel allgemeiner gestellt, als sie gemeint war. Streng genommen war nicht nur eine Erklärung dafür gefragt, dass die Anzahl der Kunden in der Kartei gleich bleibt, sondern auch dafür, warum die Verteilung auf die Gruppen E, M und K gleich bleibt. Dazu müsste man im Detail sämtliche Einträge der neuen Übergangsmatrix und des

Verschiebungsvektors im Sachzusammenhang interpretieren. Das wurde in der Abiturprüfung aber nicht erwartet.