Abitur Mathematik: Musterlösung

# Prüfungsteil 2, Aufgabe 5 Analytische Geometrie

Nordrhein-Westfalen 2012 LK

## Aufgabe a (1)

### 1. SCHRITT: DIE VEKTOREN $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ UND $\overrightarrow{BC}$ BERECHNEN

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 2. SCHRITT: DEN RECHTEN WINKEL NACHWEISEN

Ein Blick auf die Vektoren zeigt, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ gleich lang sind. Das heißt, wenn es einen rechten Winkel gibt, dann wird er von diesen beiden Vektoren gebildet.

Es gilt

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) = 0,$$

also stehen die Seiten $[AB]$ und $[AC]$ senkrecht aufeinander, d. h. das Dreieck hat bei $A$ einen rechten Winkel.

## Aufgabe a (2)

### 1. SCHRITT: BILDPUNKTE BERECHNEN

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 \cdot 3 \\ 0{,}8 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 2{,}4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow A'(-1{,}8|2{,}4|2)$

$$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 \cdot 1 + 0,8 \cdot (-2) \\ 0,8 \cdot 1 + 0,6 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,2 \\ -0,4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow B'(-2,2|-0,4|2)$

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 \cdot 5 + 0,8 \cdot (-2) \\ 0,8 \cdot 5 + 0,6 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,6 \\ 2,8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow C'(-4,6|2,8|2)$

**2. SCHRITT: RECHTEN WINKEL SUCHEN**

Es ist

$$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -2,2 \\ -0,4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1,8 \\ 2,4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 \\ -2,8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} -4,6 \\ 2,8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1,8 \\ 2,4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,8 \\ 0,4 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\overrightarrow{A'B'} \circ \overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} -0,4 \\ -2,8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2,8 \\ 0,4 \\ 0 \end{pmatrix} = (-0,4) \cdot (-2,8) - (-2,8) \cdot 0,4 = 0.$$

Das Bilddreieck ist somit ebenfalls rechtwinklig mit rechtem Winkel bei $A'$.

**Bemerkung:**

Es kann im Allgemeinen passieren, dass das Bilddreieck zwar wieder rechtwinklig ist, der rechte Winkel aber an einer anderen Ecke liegt.

## Aufgabe a (3)

Der Wert der $x_3$-Koordinate ist sowohl bei den Urpunkten als auch bei den Bildpunkten 2. Das heißt, beide Dreiecke liegen in der Ebene $x_3 = 2$, die parallel zur $x_1$-$x_2$-Ebene verläuft.

## Aufgabe b

**1. SCHRITT: ALLGEMEINEN PUNKT DER EBENE BESTIMMEN**

$E^*: 2x_1 - x_2 = 0$

Ein Punkt $(a|b|c)$ liegt genau dann auf $E^*$, wenn $b = 2a$ gilt. Die Punkte dieser Ebene sind also diejenigen der Form $(a|2a|c)$ für $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$.

**2. SCHRITT: $f(A_E)$ BERECHNEN**

Es ist

$$f\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-0{,}6) \cdot a + 0{,}8 \cdot 2a \\ 0{,}8 \cdot a + 0{,}6 \cdot 2a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ c \end{pmatrix},$$

d. h. alle Punkte auf $E^*$ sind Fixpunkte der Abbildung $f$.

## Aufgabe c (1)

**1. SCHRITT: EIGENVEKTOREN ZUM EIGENWERT 1 FINDEN**

$\lambda_1 = 1$ ist genau dann ein Eigenwert von $f$, wenn es einen Eigenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gibt, so dass $\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gilt, d. h. die Koordinaten erfüllen die Gleichungen

$(-0{,}6) \cdot x_1 + 0{,}8 \cdot x_2 = 1 \cdot x_1,$

$0{,}8 \cdot x_1 + 0{,}6 \cdot x_2 = 1 \cdot x_2$, und

$x_3 = 1 \cdot x_3.$

Äquivalent dazu ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & -1{,}6x_1 + 0{,}8x_2 = 0 \\ \text{II:} & 0{,}8x_1 - 0{,}4x_2 = 0 \\ \text{III:} & 0 \cdot x_3 = 0, \end{array}$$

wobei III automatisch erfüllt ist und I und II jeweils äquivalent zur Gleichung $2x_1 - x_2 = 0$ sind.

Die Menge der Eigenvektoren von $f$ zum Eigenwert 1 ist

$$\mathrm{Eig}_1(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \wedge a^2 + c^2 \neq 0 \right\}.$$

**2. SCHRITT: EIGENVEKTOREN ZUM EIGENWERT -1 FINDEN**

$\lambda_2 = -1$ ist genau dann ein Eigenwert von $f$, wenn es einen Eigenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gibt, so dass $\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gilt, d. h. die Koordinaten erfüllen die Gleichungen

$(-0{,}6) \cdot x_1 + 0{,}8 \cdot x_2 = -x_1,$

$0{,}8 \cdot x_1 + 0{,}6 \cdot x_2 = -x_2$, und

$x_3 = -x_3.$

Äquivalent dazu ist das lineare Gleichungssystem

I: $0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \quad = 0$
II: $0{,}8x_1 + 1{,}6x_2 \quad = 0$
III: $2x_3 = 0,$

Aus III folgt $x_3 = 0$, I und II sind jeweils äquivalent zu $x_1 + 2x_2 = 0$. Die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $-1$ ist daher

$$\mathrm{Eig}_{-1}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -2b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

## Aufgabe c (2)

Wie oben bemerkt sind die Eigenvektoren von $f$ zum Eigenwert 1 die nicht-trivialen Lösungen des Gleichungssystems

Äquivalent dazu ist das lineare Gleichungssystem

I: $-1{,}6x_1 + 0{,}8x_2 \quad = 0$
II: $0{,}8x_1 - 0{,}4x_2 \quad = 0$
III: $0 \cdot x_3 = 0,$

wobei III automatisch erfüllt ist und I und II jeweils äquivalent zur Gleichung $2x_1 - x_2 = 0$ sind.

Die Lösungen der Gleichung $2x_1 - x_2 = 0$ sind genau die Punkte von $E^*$, also sin die Eigenvektoren von $f$ zum Eigenwert 1 genau die Ortsvektoren den Punkte auf $E^*$, bis auf den Ursprung.

Die Eigenvektoren von $f$ zum Eigenwert $-1$ sind die Vektoren der Form $b\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $b \neq 0$. Da $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von $E^*$ ist (vgl. Koordinatengleichung von $E^*$), sind die Eigenvektoren von $f$ zum Eigenwert $-1$ die Ortsvektoren aller Punkte der Ursprungsgeraden senkrecht auf $E^*$ bis auf den Ursprung.

## Aufgabe d

zu 1.:

Sei $E^*$ die Ebene, für die die Abbildung $f$ eine Spiegelungsvorschrift darstellt. Nach Aufgabe b) wird jeder Punkt der Ebene $E^*$ durch die Abbildung $f$ auf sich selbst abgebildet.

zu 2.:

Der Punkt $P$ mit den Koordinaten $(a|b|c)$ sei ein Punkt, der nicht Element von $E^*$ ist. Dann ist $2a \neq b$ und

$$P' = f(P) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6a + 0{,}8b \\ 0{,}8a + 0{,}6b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -0{,}6a + 0{,}8b \\ 0{,}8a + 0{,}6b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}6a + 0{,}8b \\ 0{,}8a - 0{,}4b \\ 0 \end{pmatrix} = (0{,}8a - 0{,}4b)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $2a \neq b$ ist $0{,}8a - 0{,}4b \neq 0$, also $\overrightarrow{PP'} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und somit $P' \neq P$.

Außerdem ist $\overrightarrow{PP'} = -(0{,}8a - 0{,}4b)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ parallel zum Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von $E^*$. Also steht $\overrightarrow{PP'}$ senkrecht auf $E^*$.

zu 3.:

$d(P'; E) = d(P; E)$ gilt genau dann, wenn der Mittelpunkt $M$ der Strecke $[P'P]$ auf $E^*$ liegt. Dabei ist

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OP'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -0{,}6a + 0{,}8b \\ 0{,}8a + 0{,}6b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2a + 0{,}4b \\ 0{,}4a + 0{,}8b \\ c \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow M(0{,}2a + 0{,}4b | 0{,}4a + 0{,}8b | c)$

Die Koordinaten von $M$ erfüllen die Gleichung für $E^*$, denn

$$\begin{aligned} 2(0{,}2a + 0{,}4b) - (0{,}4a + 0{,}8b) &= 0{,}4a + 0{,}8b - 0{,}4a - 0{,}8b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist auch die 3. Bedingung erfüllt, d. h. $f$ ist eine Spiegelung an der Ebene $E^*$.

## Aufgabe e

Es sei $f_E$ eine Spiegelung an einer Ebene $E$ im $\mathbb{R}^3$, die den Ursprung enthält. Da $E$ den Ursprung enthält, hat $E$ eine Parametergleichung der Form

$E: s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$,

denn man kann den Ursprung als Aufpunkt wählen. Für $s = 1 \wedge t = 0$ ergibt sich, dass $\vec{v}$ der Ortsvektor eines Punktes $P$ auf $E$ ist. Für $s = 0 \wedge t = 1$ ergibt sich, dass $\vec{w}$ der Ortsvektor eines Punktes $Q$ auf $E$ ist. Da $E$ eine Ebene ist, sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig.

Da $f_E$ eine Spiegelung an einer Ebene $E$ ist, werden alle Punkte von $E$ durch $f_E$ auf sich selbst abgebildet, d. h. es gilt insbesondere

$f_E(P) = P$ und $f_E(Q) = Q$.

Das bedeutet wiederum

$f_E(\vec{v}) = \vec{v}$ und $f_E(\vec{w}) = \vec{w}$.

Somit sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren von $f_E$ zum Eigenwert 1.