Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 4 Analytische Geometrie

Nordrhein-Westfalen 2012 LK

Aufgabe a (1)

1. SCHRITT: MITTELPUNKT DER GRUNDFLÄCHE BERECHNEN

Die Spitze befindet sich einen Meter senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M der Grundfläche.

$\overrightarrow{0M} = \overrightarrow{0A} + 0{,}5\overrightarrow{AC}$ mit

$$0{,}5\overrightarrow{AC} = 0{,}5 \cdot \left[\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{0M} = \begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4{,}5\\4{,}5\\1\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow M(4{,}5|4{,}5|1)$

2. SCHRITT: KOORDINATEN DER SPITZE ANGEBEN

Die z-Koordinate ist um eine Einheit größer als die z-Koordinate von M.

Also hat S die Koordinaten $(4{,}5|4{,}5|2)$.

Aufgabe a (2)

1. SCHRITT: DEN VEKTOR $\overrightarrow{AS}$ BERECHNEN

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}4{,}5\\4{,}5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: LÄNGE DES VEKTORS $\overrightarrow{AS}$ BERECHNEN

$$\left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{(-0{,}5)^2 + 0{,}5^2 + 1} = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}22$$

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter, also ist die Seite $\overline{AS}$ etwa 1,22 m lang.

3. SCHRITT: SEITENLÄNGEN ANGEBEN

Da es sich um eine gerade Pyramide handelt, ist das Dreieck ABS gleichschenklig. Die Seiten $\overline{AS}$ und $\overline{BS}$ sind also jeweils etwa 1,22 m lang. Die Länge der Seite $\overline{AB}$ ist mit 1 m schon angegeben (Seitenlänge der quadratischen Grundfläche).

Aufgabe a (3)

1. SCHRITT: VOLUMEN BERECHNEN

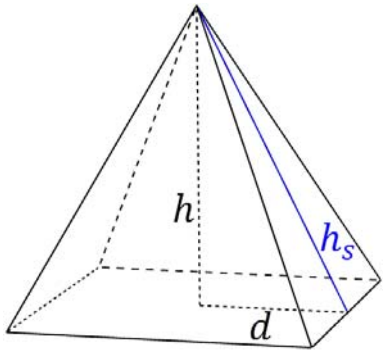
Die Grundfläche G ist ein Quadrat der Seitenlänge 1 m und die Höhe h der Pyramide ist laut Aufgabenstellung auf 1 m. Im Modell ist also

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3},$$

d. h. das Volumen beträgt $\frac{1}{3}$ m³.

2. SCHRITT: DIE HÖHE EINER SEITENFLÄCHE BERECHNEN

Die Oberfläche der Pyramide setzt sich aus der quadratischen Grundfläche und vier kongruenten Dreiecken als Seitenflächen zusammen.
Die Höhe h_s eines dieser Dreiecke bildet mit der Höhe h der Pyramide und einer Strecke d auf der Grundfläche G ein rechtwinkliges Dreieck:



Da es sich um eine gerade vierseitige Pyramide handelt, ist d genau halb so lang wie die Seitenlänge der Grundfläche. Somit ist nach dem Satz des Pythagoras

$$h_s = \sqrt{h^2 + d^2} = \sqrt{1^2 + 0{,}5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1{,}12.$$

3. SCHRITT: OBERFLÄCHENINHALT BERECHNEN

Die Grundseite g einer Seitenfläche beträgt eine Längeneinheit. Der Flächeninhalt einer Seitenfläche ist somit

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{4}\sqrt{5} \approx 0{,}56.$$

Für die Gesamtoberfläche A der Pyramide gilt also

$$A = G + 4 \cdot A_\Delta = 1 + \sqrt{5} \approx 3{,}24.$$

Die Pyramide hat demnach eine Oberfläche von etwa 3,24 m².

Aufgabe b

1. SCHRITT: NORMALENVEKTOREN BESTIMMEN

Der Winkel zwischen der Seitenfläche und der Grundfläche entspricht dem Winkel zwischen den Normalenvektoren der beiden Ebenen, in denen diese Flächen liegen.

Die Seitenfläche ABS liegt in der Ebene

$E_{ABS}: \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AS}$,

von der man einen Normalenvektor als Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren erhält:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen der Einfachheit halber $\overrightarrow{n_1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

die Grundfläche $ABCD$ verläuft parallel zur x-y-Ebene, also hat sie ebenfalls

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Normalenvektor.

2. SCHRITT: WINKEL ZWISCHEN DEN VEKTOREN BERECHNEN

Für den Neigungswinkel φ der Seitenfläche gegen der Grundfläche gilt

$$\cos(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0{,}447$$

$$\Longrightarrow \varphi \approx 63{,}43\,°$$

Aufgabe c (1)

1. SCHRITT: GERADENGLEICHUNGEN AUFSTELLEN

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die Lichtstrahlen nur die Seitenfläche BCS treffen. Die Eckpunkte des Schattendreiecks sind somit die Schnittpunkte der Geraden b (L_1B), c (L_1C) und s (L_1S) mit der x-z-Ebene.

Dabei ist

$$b: \overrightarrow{OL_1} + r \cdot \overrightarrow{L_1B} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R},$$

$$c: \overrightarrow{OL_1} + s \cdot \overrightarrow{L_1C} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

und

$$s: \overrightarrow{OL_1} + t \cdot \overrightarrow{L_1C} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

2. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE DER GERADEN MIT DER *X-Z*-EBENE BERECHNEN

Die x-z-Ebene hat die Gleichung $y = 0$. Somit gilt für die y-Koordinate des Schnittpunkts von b mit der Wand:

$$9 - 4r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

Analog gilt für die y-Koordinate des Schnittpunkts von c mit der Wand:

$$9 - 4s = 0 \Leftrightarrow s = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

und für die y-Koordinate des Schnittpunkts von s mit der Wand:

$$9 - 4{,}5t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{9}{4{,}5} = 2.$$

Durch Einsetzen dieser Parameter in die entsprechenden Geradengleichungen erhält man

$$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 2{,}25 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}625 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 2{,}25 \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}375 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{OS'} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d. h. die Schattenpunkte sind $B'(5{,}625|0|1)$, $C'(3{,}375|0|1)$ und $S'(4{,}5|0|3)$.

3. SCHRITT: ZWEI SEITENLÄNGEN DES SCHATTENDREIECKS BERECHNEN

Die Abbildung legt nahe, dass $B'S'$ und $C'S'$ gleich lang sind. Wegen

$$\left|\overrightarrow{B'S'}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5{,}625 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1{,}125 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{(-1{,}125)^2 + 2^2}$$

und

$$\left|\overrightarrow{C'S'}\right| = \left|\begin{pmatrix}4{,}5\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3{,}375\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1{,}125\\0\\2\end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{(1{,}125)^2 + 2^2} = \left|\overrightarrow{B'S'}\right|$$

ist dies auch tatsächlich der Fall.

4. SCHRITT: FLÄCHENINHALT DES SCHATTENDREIECKS BERECHNEN

Die Grundseite des Schattendreiecks ist die Differenz der x-Koordinaten von B' und C', also $|3{,}375 - 5{,}625| = 2{,}25$. Die zugehörige Höhe ist die Differenz der z-Koordinaten, also $|3 - 1| = 2$.

Somit ist der Flächeninhalt des Schattendreiecks

$\frac{1}{2} \cdot 2{,}25 \cdot 2 = 2{,}25$ [m^2].

Aufgabe c (2)

Wie aus der Abbildung erkennbar treffen die Lichtstrahlen nach wie vor nur die Seitenfläche BCS, d. h. die Schattenfläche ist immer noch ein Dreieck.

Da aber die Symmetrieachse des gleichschenkligen Dreiecks BCS und die Lichtquelle nicht mehr in einer Symmetrieebene der Pyramide liegen (Lichtquelle liegt nicht mehr mittig zwischen den Eckpunkten B und C), ist das Schattendreieck nicht mehr gleichschenklig.

Aufgabe d (1)

1. SCHRITT: GLEICHUNG DER MITTELSENKRECHTEN DER SEITE [*AB*]

Der Mittelpunkt M_{AB} der Seite $[AB]$ hat die Koordinaten $(5|4{,}5|1)$.

Die Mittelsenkrechte auf $[AB]$ geht durch den Punkt $S(4{,}5|4{,}5|2)$, da das Dreieck ABS gleichschenklig ist. Also hat sie die Gleichung

$$M_{AB}S: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\4{,}5\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix}4{,}5\\4{,}5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4{,}5\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\4{,}5\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-0{,}5\\0\\1\end{pmatrix}.$$

2. SCHRITT: GLEICHUNG DER MITTELSENKRECHTEN DER SEITE [*AS*]

Mittelpunkt der Seite $[AS]$:

$$M_{AS} = \left(\frac{5 + 4{,}5}{2}\middle|\frac{4 + 4{,}5}{2}\middle|\frac{1 + 2}{2}\right) = (4{,}75|4{,}25|1{,}5)$$

Richtungsvektoren der Mittelsenkrechten der Seite $[AS]$ sind solche, die auf den Vektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{n_1}$ (Normalenvektor der Fläche ABS) senkrecht stehen, einer ist also z. B.

$\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$, ein weiterer $2 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Eine Gleichung der Mittelsenkrechten lautet somit:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}25 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. SCHRITT: SCHNITTPUNKT DER MITTELSENKRECHTEN BERECHNEN

Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten ist zugleich der Schnittpunkt der zwei eben bestimmten Geraden. Er ergibt sich durch Lösen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}25 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ -0{,}25 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Das ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\text{I:} \quad -0{,}5\lambda \quad -\mu = -0{,}25 \\ &\text{II:} \qquad\qquad -5\mu = -0{,}25. \end{aligned}$$

Aus II folgt unmittelbar $\mu = \frac{-0{,}25}{-5} = 0{,}05$.

Einsetzen dieses Parameters in die zugehörige Geradengleichung liefert

$$\begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}25 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + 0{,}05 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 4{,}5 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten hat also die Koordinaten $M(4{,}8|4{,}5|1{,}4)$.

Aufgabe d (2)

1. SCHRITT: GERADENGLEICHUNG DES LASERSTRAHLS AUFSTELLEN

Der Normalenvektor $\vec{n}$ der Fläche ABS dient als Richtungsvektor der Geraden g_L, auf der der Laserstrahl verläuft. Als Aufpunkt dient M. Die zugehörige Geradengleichung lautet somit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 4{,}5 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. SCHRITT: SCHNITTPUNKT GERADE–EBENE BERECHNEN

Wie aus der Skizze ersichtlich, kann die Laser-Lichtquelle nur an der Wand mit der Gleichung $x = 9$ oder an der Decke befestigt sein. Der Schnittpunkt der Geraden g_L mit der Ebene $x = 9$ ergibt sich dadurch, dass man die x-Koordinate in der Geradengleichung gleich 9 setzt:

$$4{,}8 + 2\lambda = 9 \Leftrightarrow \lambda = \frac{9 - 4{,}8}{2} = 2{,}1.$$

Einsetzen in die Geradengleichung liefert

$$\begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 4{,}5 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + 2{,}1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}.$$

Da die z-Koordinate kleiner als 5 ist, liegt dieser Punkt auf der Hallenwand. Die Position der Lichtquelle muss also $(9|4{,}5|,5)$ sein.

Aufgabe e

1. SCHRITT: GLEICHUNG DER GERADEN *QR* BERECHNEN

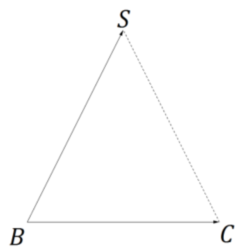
$$QR: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: EBENENGLEICHUNG E_{BCS} AUFSTELLEN

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{BCS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dabei liegt $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ genau dann auf der Fläche BCS, wenn $s \in [0; 1]$, $t \in [0; 1]$ und $s + t \leq 1$ gilt (Konvexkombination).



3. SCHRITT: SCHNITTPUNKT GERADE–EBENE BERECHNEN

Zu zeigen ist, dass der Schnittpunkt der Geraden QR mit der Ebene E_{BCS} auf der Dreiecksfläche BCS liegt. Der Schnittpunkt ergibt sich dabei aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix}9\\7\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}8\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow r\begin{pmatrix}8\\4\\3\end{pmatrix}-s\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9\\7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\-2\end{pmatrix}.$$

Das führt zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&\text{I:} && 8r+s+0{,}5t=-4\\
&\text{II:} && 4r+0{,}5t=-2\\
&\text{III:} && 3r\phantom{+s+0{,}5}-t=-2.
\end{aligned}$$

Aus III folgt sofort $t=3r+2$. Dies in II eingesetzt liefert

$$4r+0{,}5\cdot(3r+2)=-2\Leftrightarrow 5{,}5r=-3$$

$$\Leftrightarrow r=-\frac{3}{5{,}5}=-\frac{6}{11}.$$

Dies in III eingesetzt liefert

$$3\cdot\left(-\frac{6}{11}\right)-t=-2\Leftrightarrow t=2-\frac{18}{11}=\frac{4}{11}.$$

Durch Einsetzen von $r=-\frac{6}{11}$ und $t=\frac{4}{11}$ in I ergibt sich

$$8\cdot\left(-\frac{6}{11}\right)+s+0{,}5\cdot\frac{4}{11}=-4\Leftrightarrow s=-4-\frac{2}{11}+\frac{48}{11}=\frac{2}{11}.$$

Es gilt $0\le s=\frac{2}{11}\le 1$, $0\le t=\frac{4}{11}\le 1$ und $s+t=\frac{6}{11}\le 1$, also liegt der Schnittpunkt

$$\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\\1\end{pmatrix}$$

mit diesen Parametern auf der Seitenfläche BCS der Pyramide.