Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 1, Aufgabe 3 Analysis

Nordrhein-Westfalen 2012 LK

Aufgabe a (1)

1. SCHRITT: NULLSTELLEN BESTIMMEN

$$f_a(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} \cdot e^{ax} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

da $e^{ax} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. SCHRITT: ABLEITUNGEN BERECHNEN

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt von G_{f_a} an der Stelle x: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$.

Hinreichende Bedingung für ein Maximum bzw. Minimum von G_{f_a} an der Stelle x: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ bzw $f''(x) > 0$.

$$f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + \frac{x}{a} \cdot e^{ax} \cdot a = \left(\frac{1}{a} + x\right) \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f_a''(x) = \left(\frac{1}{a} + x\right) \cdot e^{ax} \cdot a + e^{ax} = (2 + ax) \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f_a'''(x) = (2 + ax) \cdot e^{ax} \cdot a + a \cdot e^{ax} = a \cdot (3 + ax) \cdot e^{ax}$$

3. SCHRITT: 1. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$$\left(\frac{1}{a} + x\right) \cdot e^{ax} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{a}$$

4. SCHRITT: HINREICHENDE BEDINGUNG PRÜFEN

$$f_a''(x) = (2 + ax) \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f_a''\left(-\frac{1}{a}\right) = e^{-1} > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $x = -\frac{1}{a}$.

5. SCHRITT: FUNKTIONSWERT DES EXREMPUNKTES BERECHNEN

$$f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax} \Rightarrow f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a^2} \cdot e^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{Tiefpunkt: } \left(-\frac{1}{a}\middle|-\frac{1}{a^2 \cdot e}\right)$$

6. SCHRITT: 2. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow (2 + ax) \cdot e^{ax} = 0 \Leftrightarrow 2 + ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{a}$$

7. SCHRITT: ÜBERPRÜFUNG MITTELS 3. ABLEITUNG

$$f_a'''(x) = a \cdot (3 + ax) \cdot e^{ax}$$

$$f_a'''(x)\left(-\frac{2}{a}\right) = a \cdot e^{-2} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x = -\frac{2}{a}$.

8. SCHRITT: FUNKTIONSWERT DES WENDEPUNKTES BERECHNEN

$$f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax} \Rightarrow f_a\left(-\frac{2}{a}\right) = -\frac{2}{a^2} \cdot e^{-2}$$

$$\Rightarrow \text{Wendepunkt: } \left(-\frac{2}{a}\middle|-\frac{2}{a^2 \cdot e^2}\right)$$

Aufgabe a (2)

Für $x < -\frac{1}{a}$ gilt $f_a'(x) = \left(\frac{1}{a} + x\right) \cdot e^{ax} < 0$, d. h. der Graph fällt streng monoton. Dementsprechend ist $f_a(x) < f_a\left(-\frac{1}{a}\right)$ für alle $x < -\frac{1}{a}$. Für $x > -\frac{1}{a}$ gilt $f_a'(x) = \left(\frac{1}{a} + x\right) \cdot e^{ax} > 0$, d. h. der Graph steigt streng monoton. Dementsprechend ist $f_a\left(-\frac{1}{a}\right) < f_a(x)$ für alle $x > -\frac{1}{a}$. Daher ist $T_a\left(-\frac{1}{a}\middle|-\frac{1}{a^2 \cdot e}\right)$ das globale Minimum des Graphen von f_a.

Aufgabe b (1)

1. SCHRITT: VEKTOR $\overrightarrow{T_aW_a}$ BERECHNEN

Nach dem Satz des Pythagoras gilt für den Abstand $\lambda(a)$ von T_a zu W_a:

$\left(\lambda(a)\right)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, wobei Δx die Differenz der x-Koordinaten und Δy die Differenz der y-Koordinaten der beiden Punkte ist. Im Einzelnen ist

$\Delta x = -\frac{1}{a} - \left(-\frac{2}{a}\right) = \frac{1}{a}$ und $\Delta y = -\frac{1}{a^2 e} - \left(-\frac{2}{a^2 e^2}\right) = \frac{2-e}{a^2 e^2}$.

Also ist

$$\left(\lambda(a)\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{2-e}{a^2 e^2}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{(2-e)^2}{a^4 e^4}.$$

Zum Vergleich ist für $k = (e-2)^2 e^{-4}$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{k}{a^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{(e-2)^2 e^{-4}}{a^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{(2-e)^2}{a^4 e^4},$$

also gleich $\left(\lambda(a)\right)^2$.

Aufgabe b (2)

1. SCHRITT: FUNKTION FÜR DAS QUADRAT DER LÄNGE AUFSTELLEN

Definiere $g\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, a \longmapsto \left(\lambda(a)\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{k}{a^4}$ mit $k > 0$ wie oben. Es ist nach Extremstellen dieser Funktion gefragt.

2. SCHRITT: MONOTONIE ÜBER 1. ABLEITUNG UNTERSUCHEN

$$g(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{k}{a^4}$$

$$\Longrightarrow g'(a) = -\frac{2}{a^3} - \frac{4k}{a^5} = -\left(\frac{2}{a^3} + \frac{4k}{a^5}\right) < 0 \forall a \in \mathbb{R}^+$$

$\Longrightarrow$ g fällt streng monoton auf dem gesamten Definitionsbereich. Somit kann g (also nach dem Hinweis auch $\lambda(a)$) nicht extremal werden.

Aufgabe c (1)

Es ist $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax} = u(x) \cdot v'(x)$

mit $u(x) = \frac{x}{a}$ und $v'(x) = e^{ax}$.

Regel der partiellen Integration:

$$\int u(x) \cdot v'(x) \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \mathrm{d}x$$

Eine Stammfunktion von v' ist gegeben durch $v(x) = \frac{1}{a} e^{ax}$, ferner ist $u'(x) = \frac{1}{a}$. Also folgt

$$\int f_a(x)\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x}{a^2}e^{ax} - \int \frac{1}{a^2}e^{ax}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x}{a^2}e^{ax} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a}e^{ax} + c$$
$$= \frac{1}{a^2}e^{ax}\cdot\left(x - \frac{1}{a}\right) + c$$

Für $c = 0$ ergibt sich die Stammfunktion

$$F_a(x) = \frac{1}{a^2}e^{ax}\cdot\left(x - \frac{1}{a}\right).$$

Aufgabe c (2)

1. SCHRITT: BESTIMMTES INTEGRAL AUFSTELLEN

Anhand des Funktionsterms $f_a(x) = \frac{x}{a}\cdot e^{ax}$ erkennt man sofort, dass $f_a(x) < 0$ für $x < 0$ gilt, d. h. die gesuchte Fläche liegt ganz unterhalb der x-Achse. Deswegen ist

$$I_a = -\int_{-\infty}^{0} f_a(x)\mathrm{d}x,$$

wobei das uneigentliche Integral wie folgt definiert wird:

$$\int_{-\infty}^{0} f_a(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{0} f_a(x)\mathrm{d}x.$$

Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist für jedes $u < 0$

$$\int_{u}^{0} f_a(x)\mathrm{d}x = [F_a(x)]_u^0$$
$$= \frac{1}{a^2}e^{a\cdot 0}\cdot\left(0 - \frac{1}{a}\right) - \left(\frac{1}{a^2}e^{au}\cdot\left(u - \frac{1}{a}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2}e^{au}\cdot\left(u - \frac{1}{a}\right).$$

2. SCHRITT: GRENZWERT BERECHNEN

Nun ist

$$\lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{0} f_a(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to-\infty}\left(-\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2}e^{au}\cdot\left(u - \frac{1}{a}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2}\cdot\lim_{u\to-\infty} ue^{au} + \frac{1}{a^3}\lim_{u\to-\infty} e^{au},$$

wobei $\lim\limits_{u\to-\infty} e^{au} = 0$ gilt und

$$\lim_{u\to-\infty} ue^{au} = \lim_{u\to-\infty} \frac{u}{e^{-au}} = \lim_{u\to-\infty} \frac{1}{-ae^{-au}} = 0$$

nach der Regel von de l'Hospital.

Somit ist

$$\lim_{u\to-\infty} \int_u^0 f_a(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2} \cdot \underbrace{\lim_{u\to-\infty} ue^{au}}_{=0} + \frac{1}{a^3} \underbrace{\lim_{u\to-\infty} e^{au}}_{=0} = -\frac{1}{a^3},$$

also

$$I_a = -\int_{-\infty}^0 f_a(x)\mathrm{d}x = -\left(-\frac{1}{a^3}\right) = \frac{1}{a^3}\ [\mathrm{FE}].$$

Aufgabe d (1)

1. SCHRITT: 1. ABLEITUNG BESTIMMEN

$h(x) = e^x - x$

$h'(x) = e^x - 1$

2. SCHRITT: UNGLEICHUNG AUFSTELLEN UND LÖSEN

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

Somit ist h für $x > 0$ streng monoton steigend.

3. SCHRITT: $h(0)$ BERECHNEN UND UNGLEICHUNG FOLGERN

$h(0) = e^0 - 0 = 1$

Aufgrund der strengen Monotonie gilt $x > 0 \Longrightarrow h(x) > h(0) = 1$. Also ist $h(x) \geq 1 \forall x > 0$.

Aufgabe d (2)

Für $x = 0$ ist offenbar $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax} = x^2$, denn beide Funktionen nehmen an dieser Stelle den Wert null an. Zu zeigen bleibt, dass $f_a(x) \neq x^2$ für alle $x \neq 0$ gilt. Im Folgenden wird also angenommen, dass $x \neq 0$ ist.

$$\begin{aligned}
& f_a(x) = x^2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x}{a} \cdot e^{ax} = x^2 = \frac{x}{a} \cdot ax \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x}{a}(e^{ax} - ax) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{ax} - ax = 0 \qquad \text{da } x \neq 0 \\
\Leftrightarrow\ & h(ax) = 0
\end{aligned}$$

Laut Teilaufgabe d) (2) ist $h(x) \geq 1 \forall x > 0$, also ist $h(ax) = 0$ für kein $x > 0$ erfüllt. Für $x > 0$ ist $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax} < 0$ und $x^2 > 0$, also ist in diesem Bereich auch stets $f_a(x) \neq x^2$. Somit bleibt $x = 0$ die einzige Schnittstelle des Graphen von f_a mit der Parabel p.