

Abitur Mathematik: Musterlösung

## Prüfungsteil 1, Aufgabe 3

### Analysis

Nordrhein-Westfalen 2012LK

#### Aufgabe a (1)

##### 1. SCHRITT: NULLSTELLEN BESTIMMEN

$$f_a(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} \cdot e^{ax} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

da  $e^{ax} > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

##### 2. SCHRITT: ABLEITUNGEN BERECHNEN

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt von  $G_{f_a}$  an der Stelle  $x$ :  
 $f''(x) = 0$  und  $f'''(x) \neq 0$ .

Hinreichende Bedingung für ein Maximum bzw. Minimum von  $G_{f_a}$  an der Stelle  $x$ :  
 $f'(x) = 0$  und  $f''(x) < 0$  bzw.  $f''(x) > 0$ .

$$f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f'_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + \frac{x}{a} \cdot e^{ax} \cdot a = \left(\frac{1}{a} + x\right) \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f''_a(x) = \left(\frac{1}{a} + x\right) \cdot e^{ax} \cdot a + e^{ax} = (2 + ax) \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f'''_a(x) = (2 + ax) \cdot e^{ax} \cdot a + a \cdot e^{ax} = a \cdot (3 + ax) \cdot e^{ax}$$

##### 3. SCHRITT: 1. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$$\left(\frac{1}{a} + x\right) \cdot e^{ax} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{a}$$

##### 4. SCHRITT: HINREICHENDE BEDINGUNG PRÜFEN

$$f''_a(x) = (2 + ax) \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f''_a\left(-\frac{1}{a}\right) = e^{-1} > 0$$

$$\Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x = -\frac{1}{a}$$

Prüfungsteil 1:

Analysis

**5. SCHRITT: FUNKTIONSWERT DES EXREMPUNKTES BERECHNEN**

$$f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax} \Rightarrow f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a^2} \cdot e^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{Tiefpunkt: } \left(-\frac{1}{a} \mid -\frac{1}{a^2 \cdot e}\right)$$

**6. SCHRITT: 2. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN**

$$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow (2 + ax) \cdot e^{ax} = 0 \Leftrightarrow 2 + ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{a}$$

**7. SCHRITT: ÜBERPRÜFUNG MITTELS 3. ABLEITUNG**

$$f_a'''(x) = a \cdot (3 + ax) \cdot e^{ax}$$

$$f_a'''(x) \left(-\frac{2}{a}\right) = a \cdot e^{-2} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x = -\frac{2}{a}$$

**8. SCHRITT: FUNKTIONSWERT DES WENDEPUNKTES BERECHNEN**

$$f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax} \Rightarrow f_a\left(-\frac{2}{a}\right) = -\frac{2}{a^2} \cdot e^{-2}$$

$$\Rightarrow \text{Wendepunkt: } \left(-\frac{2}{a} \mid -\frac{2}{a^2 \cdot e^2}\right)$$

**Aufgabe a (2)**

Für  $x < -\frac{1}{a}$  gilt  $f_a'(x) = \left(\frac{1}{a} + x\right) \cdot e^{ax} < 0$ , d. h. der Graph fällt streng monoton. Dementsprechend ist  $f_a(x) < f_a\left(-\frac{1}{a}\right)$  für alle  $x < -\frac{1}{a}$ . Für  $x > -\frac{1}{a}$  gilt  $f_a'(x) = \left(\frac{1}{a} + x\right) \cdot e^{ax} > 0$ , d. h. der Graph steigt streng monoton. Dementsprechend ist  $f_a\left(-\frac{1}{a}\right) < f_a(x)$  für alle  $x > -\frac{1}{a}$ . Daher ist  $T_a\left(-\frac{1}{a} \mid -\frac{1}{a^2 \cdot e}\right)$  das globale Minimum des Graphen von  $f_a$ .

**Aufgabe b (1)**

**1. SCHRITT: VEKTOR  $\overrightarrow{T_a W_a}$  BERECHNEN**

Nach dem Satz des Pythagoras gilt für den Abstand  $\lambda(a)$  von  $T_a$  zu  $W_a$ :

$(\lambda(a))^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ , wobei  $\Delta x$  die Differenz der  $x$ -Koordinaten und  $\Delta y$  die Differenz der  $y$ -Koordinaten der beiden Punkte ist. Im Einzelnen ist

**Prüfungsteil 1:**

Analysis

$$\Delta x = -\frac{1}{a} - \left(-\frac{2}{a}\right) = \frac{1}{a} \text{ und } \Delta y = -\frac{1}{a^2 e} - \left(-\frac{2}{a^2 e^2}\right) = \frac{2-e}{a^2 e^2}.$$

Also ist

$$(\lambda(a))^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{2-e}{a^2 e^2}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{(2-e)^2}{a^4 e^4}.$$

Zum Vergleich ist für  $k = (e-2)^2 e^{-4}$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{k}{a^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{(e-2)^2 e^{-4}}{a^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{(2-e)^2}{a^4 e^4},$$

also gleich  $(\lambda(a))^2$ .

## Aufgabe b (2)

### 1. SCHRITT: FUNKTION FÜR DAS QUADRAT DER LÄNGE AUFSTELLEN

Definiere  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto (\lambda(a))^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{k}{a^4}$  mit  $k > 0$  wie oben. Es ist nach Extremstellen dieser Funktion gefragt.

### 2. SCHRITT: MONOTONIE ÜBER 1. ABLEITUNG UNTERSUCHEN

$$g(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{k}{a^4}$$

$$\Rightarrow g'(a) = -\frac{2}{a^3} - \frac{4k}{a^5} = -\left(\frac{2}{a^3} + \frac{4k}{a^5}\right) < 0 \forall a \in \mathbb{R}^+$$

$\Rightarrow g$  fällt streng monoton auf dem gesamten Definitionsbereich. Somit kann  $g$  (also nach dem Hinweis auch  $\lambda(a)$ ) nicht extremal werden.

## Aufgabe c (1)

Es ist  $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax} = u(x) \cdot v'(x)$

mit  $u(x) = \frac{x}{a}$  und  $v'(x) = e^{ax}$ .

Regel der partiellen Integration:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Eine Stammfunktion von  $v'$  ist gegeben durch  $v(x) = \frac{1}{a} e^{ax}$ , ferner ist  $u'(x) = \frac{1}{a}$ . Also folgt

**Prüfungsteil 1:**

Analysis

$$\begin{aligned} \int f_a(x) dx &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx \\ &= \frac{x}{a^2} e^{ax} - \int \frac{1}{a^2} e^{ax} dx \\ &= \frac{x}{a^2} e^{ax} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} e^{ax} + c \\ &= \frac{1}{a^2} e^{ax} \cdot \left(x - \frac{1}{a}\right) + c \end{aligned}$$

Für  $c = 0$  ergibt sich die Stammfunktion

$$F_a(x) = \frac{1}{a^2} e^{ax} \cdot \left(x - \frac{1}{a}\right).$$

## Aufgabe c (2)

### 1. SCHRITT: BESTIMMTES INTEGRAL AUFSTELLEN

Anhand des Funktionsterms  $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax}$  erkennt man sofort, dass  $f_a(x) < 0$  für  $x < 0$  gilt, d. h. die gesuchte Fläche liegt ganz unterhalb der  $x$ -Achse. Deswegen ist

$$I_a = - \int_{-\infty}^0 f_a(x) dx,$$

wobei das uneigentliche Integral wie folgt definiert wird:

$$\int_{-\infty}^0 f_a(x) dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 f_a(x) dx.$$

Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist für jedes  $u < 0$

$$\begin{aligned} \int_u^0 f_a(x) dx &= [F_a(x)]_u^0 \\ &= \frac{1}{a^2} e^{a \cdot 0} \cdot \left(0 - \frac{1}{a}\right) - \left(\frac{1}{a^2} e^{au} \cdot \left(u - \frac{1}{a}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2} e^{au} \cdot \left(u - \frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

### 2. SCHRITT: GRENZWERT BERECHNEN

Nun ist

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 f_a(x) dx &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2} e^{au} \cdot \left(u - \frac{1}{a}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2} \cdot \lim_{u \rightarrow -\infty} u e^{au} + \frac{1}{a^3} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^{au}, \end{aligned}$$

Prüfungsteil 1:

Analysis

wobei  $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^{au} = 0$  gilt und

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^{au} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{u}{e^{-au}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{-ae^{-au}} = 0$$

nach der Regel von de l'Hospital.

Somit ist

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 f_a(x) dx = -\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2} \cdot \underbrace{\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^{au}}_{=0} + \frac{1}{a^3} \underbrace{\lim_{u \rightarrow -\infty} e^{au}}_{=0} = -\frac{1}{a^3},$$

also

$$I_a = - \int_{-\infty}^0 f_a(x) dx = - \left( -\frac{1}{a^3} \right) = \frac{1}{a^3} \text{ [FE].}$$

### Aufgabe d (1)

**1. SCHRITT: 1. ABLEITUNG BESTIMMEN**

$$h(x) = e^x - x$$

$$h'(x) = e^x - 1$$

**2. SCHRITT: UNGLEICHUNG AUFSTELLEN UND LÖSEN**

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

Somit ist  $h$  für  $x > 0$  streng monoton steigend.

**3. SCHRITT:  $h(0)$  BERECHNEN UND UNGLEICHUNG FOLGERN**

$$h(0) = e^0 - 0 = 1$$

Aufgrund der strengen Monotonie gilt  $x > 0 \Rightarrow h(x) > h(0) = 1$ . Also ist  $h(x) \geq 1 \forall x > 0$ .

### Aufgabe d (2)

Für  $x = 0$  ist offenbar  $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax} = x^2$ , denn beide Funktionen nehmen an dieser Stelle den Wert null an. Zu zeigen bleibt, dass  $f_a(x) \neq x^2$  für alle  $x \neq 0$  gilt. Im Folgenden wird also angenommen, dass  $x \neq 0$  ist.

$$\begin{aligned} f_a(x) &= x^2 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{a} \cdot e^{ax} &= x^2 = \frac{x}{a} \cdot ax \\ \Leftrightarrow \frac{x}{a} (e^{ax} - ax) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{ax} - ax &= 0 && \text{da } x \neq 0 \\ \Leftrightarrow h(ax) &= 0 \end{aligned}$$

## Prüfungsteil 1:

## Analysis

Laut Teilaufgabe d) (2) ist  $h(x) \geq 1 \forall x > 0$ , also ist  $h(ax) = 0$  für kein  $x > 0$  erfüllt. Für  $x > 0$  ist  $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax} < 0$  und  $x^2 > 0$ , also ist in diesem Bereich auch stets  $f_a(x) \neq x^2$ . Somit bleibt  $x = 0$  die einzige Schnittstelle des Graphen von  $f_a$  mit der Parabel  $p$ .