Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 1, Aufgabe 2 Analysis

Nordrhein-Westfalen 2012LK

Aufgabe a (1)

Anhand der Graphen ist erkennbar, dass sowohl in der Stadt als auch auf Land die Ozonbelastung im Verlauf des Morgens ansteigt, am Nachmittag am höchsten ist, und danach kontinuierlich wieder abnimmt.

Die Ozonbelastung im ländlichen Raum ist dabei stets höher ist als in der Stadt. Anstieg und Rückgang der Ozonwerte gehen in der Stadt schneller vonstatten als auf dem Land und der höchste Wert wird etwa 2 Stunden später erreicht (auf dem Land gegen 16 Uhr und in der Stadt erst gegen 18 Uhr).

Aufgabe a (2)

$f(t) = 0{,}06 \cdot (0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + 101{,}2t^2) + 55$
$\Longrightarrow f(0) = 55$ und $f(14) = 76{,}168$.

Um 7 Uhr wird in der Stadt eine Ozonkonzentration von 55 $\frac{\mu g}{m^3}$ und um 21 Uhr eine Konzentration von 76,168 $\frac{\mu g}{m^3}$ prognostiziert.

Aufgabe a (3)

1. SCHRITT: 1. UND 2. ABLEITUNG BESTIMMEN

Gesucht ist das Maximum von f auf $[0; 14]$. Eine hinreichende für ein Maximum an der Stelle x lautet: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$. Dabei ist

$f(t) = 0{,}06 \cdot (0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + 101{,}2t^2) + 55$

$\Longrightarrow f'(t) = 0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8t^2 + 202{,}4t)$

$\Longrightarrow f''(t) = 0{,}06 \cdot (3t^2 - 63{,}6t + 202{,}4)$

2. SCHRITT: 1. ABLEITUNG $= 0$ SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8t^2 + 202{,}4t) = 0$

$\Leftrightarrow t^3 - 31{,}8t^2 + 202{,}4t = 0$ $\quad |\, t$ ausklammern

$\Leftrightarrow t(t^2 - 31{,}8t + 202{,}4) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ oder $t^2 - 31{,}8t + 202{,}4 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung mit der pq-Formel:

$t^2 - 31{,}8t + 202{,}4 = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow t &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= 15{,}9 \pm \sqrt{(15{,}9)^2 - 202{,}4} \\ &= 15{,}9 \pm 7{,}1 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow t = 8{,}8$ oder $t = 23$.

Da $t = 23$ außerhalb des Modellierungsbereichs liegt, kommen nur $t = 0$ und $t = 8{,}8$ als Maximalstellen in Frage.

3. SCHRITT: MAXIMALITÄT AN DEN NULLSTELLEN VON f' PRÜFEN

$f''(t) = 0{,}06 \cdot (3t^2 - 63{,}6t + 202{,}4)$

$f''(8{,}8) = -7{,}4976 < 0 \Longrightarrow$ lokales Maximum bei $t = 8{,}8$.

4. SCHRITT: BERECHNUNG DER FUNKTIONSWERTE

Randwerte oben schon berechnet: $f(0) = 55$ und $f(14) = 76{,}168$. Zum Vergleich: $f(8{,}8) = 181{,}753792$. Dies ist also der größte Wert.

Die höchste Ozonkonzentration beträgt etwa 181,75 $\frac{\mu g}{m^3}$ und wird um 15^{48} Uhr erreicht.

Aufgabe b (1)

Der Graph von f hat im dargestellten Bereich laut Abbildung zwei Schnittpunkte mit der Geraden $y = 180$, die in etwa bei $t = 8{,}2$ und $t = 9{,}4$ liegen. Einsetzen liefert

$f(8{,}2) \approx 180{,}43$ und $f(9{,}4) \approx 180{,}38$. Für $t \in [8{,}2; 9{,}4]$ ist also auf jeden Fall $f(t) > 180$. Das bedeutet, dass laut Prognose die Ozonkonzentration mindestens von 15^{12} Uhr bis 16^{24} Uhr oberhalb von 180 $\frac{\mu g}{m^3}$ liegt, also über eine Stunde lang.

Aufgabe b (2)

Gesucht sind Maximum und Minimum von f' im dargestellten Bereich.

Hinreichende Bedingung für lokales Extremum von f' an der Stelle x:
$f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$.

1. SCHRITT: 2. ABLEITUNG VON f BESTIMMEN

$f''(t) = 0{,}06 \cdot (3t^2 - 63{,}6t + 202{,}4)$ (s.o.)

2. SCHRITT: 2. ABLEITUNG $= 0$ SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$0{,}06 \cdot (3t^2 - 63{,}6t + 202{,}4) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 63{,}6t^2 + 202{,}4 = 0$

Die quadratische Lösungsformel liefert

$$t_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{63{,}6 \pm \sqrt{(-63{,}6)^2 - 2428{,}8}}{6} = \frac{63{,}6 \pm \sqrt{1616{,}16}}{6}$$

$t_1 \approx 3{,}9$

$t_2 \approx 17{,}3$

3. SCHRITT: STEIGUNG AN DEN RÄNDERN DER FUNKTION BERÜCKSICHTIGEN

$t_2 > 14$ liegt nicht im Modellierungsbereich. Als Maximal- oder Minimalstellen von f' kommen demnach nur t_1 und die Randstellen $t = 0$ und $t = 14$ in Frage. Die zugehörigen Werte von f' sind

$f'(0) = 0$ (s.o.), $f'(t_1) \approx f'(3{,}9) \approx 21{,}9$ und $f'(14) \approx -39{,}3$.

Somit nimmt die Ozonkonzentration bei $t = t_1 \approx 3{,}9$ (also gegen 10^{54} Uhr) am stärksten zu und bei $t = 14$ (also um 21^{00} Uhr) am stärksten ab.

Aufgabe b (3)

Die durchschnittliche Ozonkonzentration ist

$$\frac{1}{14}\int_0^{14} f(t)\mathrm{d}t,$$

wobei $F(t) = 0{,}003t^5 - 0{,}159t^4 + 2{,}024t^3 + 55t$ eine Stammfunktion von f definiert. Daher ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\frac{1}{14}\int_0^{14} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{14}\left[0{,}003t^5 - 0{,}159t^4 + 2{,}024t^3 + 55t\right]_0^{14}$$
$$= 130{,}656.$$

Die durchschnittliche Ozonkonzentration liegt bei etwa 130,7 $\frac{\mu g}{m^3}$.

Aufgabe b (4)

Die Abbildung lässt vermuten, dass der Graph von f irgendwo im Bereich $]14;24]$ die x-Achse unterschreitet. Tatsächlich ist

$f(24) = -262{,}952 < 0.$

Eine negative Ozonkonzentration macht für die Modellierung keinen Sinn. Daher ist die Funktion f nicht auf dem ganzen Intervall $[0;24]$ für die Modellierung geeignet.

Aufgabe c

1. SCHRITT: GEGEBENE WERTE NOTIEREN

$O_m = 0{,}25 \cdot O_h + 5{,}5 \cdot T_m - 40$

Gegeben: $O_m = 180; \quad O_h = 120$

Gesucht: T_m

2. SCHRITT: GLEICHUNG LÖSEN

$$\begin{aligned} 0{,}25 \cdot 120 + 5{,}5 \cdot T_m - 40 &= 180 && | + 10 \\ 5{,}5 \cdot T_m &= 190 && |: 5{,}5 \\ T_m &= 34{,}\overline{54} \end{aligned}$$

Es müsste eine Temperatur von etwas mehr als 34,5 °C vorhergesagt werden.

Aufgabe d

1. SCHRITT: 1. ABLEITUNG BERECHNEN

$f_{a;b}(t) = 0{,}06\left(0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + a \cdot t^2\right) + b$

$\Rightarrow f'_{a;b}(t) = 0{,}06\left(t^3 - 31{,}8t^2 + 2 \cdot a \cdot t\right)$

2. SCHRITT: NULLSTELLEN DER ABLEITUNG IN ABHÄNGIGKEIT VON a

$t^3 - 31{,}8t^2 + 2 \cdot a \cdot t = 0 \Leftrightarrow t\left(t^2 - 31{,}8t + 2a\right) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ oder $t^2 - 31{,}8t + 2a = 0$

$t = 0$ entspricht keiner Zeit zwischen 14 und 17 Uhr.

Nach der quadratischen Lösungsformel ist

$t^2 - 31{,}8t + 2a = 0 \Leftrightarrow t = 15{,}9 \pm \sqrt{252{,}81 - 2a}.$

$15{,}9 + \sqrt{252{,}81 - 2a} > 14$ liegt nicht im Modellierungsbereich. Die Maximalstelle muss also bei $t = 15{,}9 - \sqrt{252{,}81 - 2a}$ liegen.

3. SCHRITT: UNGLEICHUNGEN AUFSTELLEN UND LÖSEN

14 Uhr entspricht $t = 7$, 17 Uhr entspricht $t = 10$. Es soll also gelten:

$7 < 15{,}9 - \sqrt{252{,}81 - 2a} < 10$

$\Leftrightarrow -8{,}9 < -\sqrt{252{,}81 - 2a} < -5{,}9$

$\Leftrightarrow 8{,}9 > \sqrt{252{,}81 - 2a} > 5{,}9$

$\Leftrightarrow 79{,}21 > 252{,}81 - 2a > 34{,}81$

$\Leftrightarrow -173{,}6 > -2a > -218$

$\Leftrightarrow 173{,}6 < 2a < 218$

$\Leftrightarrow 86{,}8 < a < 109$

Das Ozonmaximum wird genau dann zwischen 14 und 17 Uhr erreicht, wenn $86{,}8 < a < 109$ gilt.