Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 1, Aufgabe 1 Analysis

Nordrhein-Westfalen 2012LK

Aufgabe a

1. SCHRITT: ABLEITUNGEN BERECHNEN

Hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum bei x: $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) < 0$.

$$f_a(t) = \frac{a}{60}\left(1 - e^{-\frac{1}{20}t}\right) - \frac{1}{600}t$$

$$\Rightarrow f_a'(t) = \frac{a}{60} \cdot \left(-e^{-\frac{1}{20}t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) - \frac{1}{600}$$

$$= \frac{a}{1200}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600}$$

$$\Rightarrow f_a''(t) = \frac{a}{1200}e^{-\frac{1}{20}t} \cdot \left(-\frac{1}{20}\right)$$

$$= -\frac{a}{24000}e^{-\frac{1}{20}t} < 0 \text{ für } a > 0.$$

2. SCHRITT: ERSTE ABLEITUNG NULL SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$f_a'(t) = 0$

$$\frac{a}{1200}e^{-\frac{1}{20}t_m} = \frac{1}{600} \qquad \left| \cdot \frac{1200}{a}\right.$$

$$e^{-\frac{1}{20}t_m} = \frac{20}{a} \qquad |\text{ logarithmieren}$$

$$-\frac{1}{20}t_m = \ln\left(\frac{2}{a}\right) \qquad |\cdot(-20)$$

$$t_m = -20\ln\left(\frac{2}{a}\right)$$

$$= 20\ln\left(\frac{a}{2}\right)$$

Wegen $a > 2$ ist $f_a'(0) > 0$, so dass bei $x = 0$ kein Randmaximum vorliegen kann. Für $a > 0$ ist außerdem die zweite Ableitung von f_a stets negativ, so dass der gesamte Graph rechtsgekrümmt ist. Deswegen ist die Steigung von f_a für $x > 20\ln\left(\frac{a}{2}\right)$ stets negativ, sodass der Wert

$f_a\left(20\ln\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ für kein $x > 20\ln\left(\frac{a}{2}\right)$ überschritten werden kann. Somit ist $t_m = 20\ln\left(\frac{a}{2}\right)$ die globale Maximalstelle von f_a.

3. SCHRITT: EINFLUSS DES PARAMETERS a

Da die Logarithmusfunktion streng monoton wächst, wird $t_m = 20\ln\left(\frac{a}{2}\right)$ um so größer, je größer der Parameter a ist.

Interpretation: Je mehr Alkohol sich im Wein befindet, umso später erreicht die Alkoholkonzentration im Blut den Maximalwert. Der Körper braucht also um so länger, das Alkohol im Blut aufzunehmen.

Aufgabe b (1)

Zeitpunkt der maximalen Blutalkoholkonzentration:

$t_m = 20\ln\left(\frac{a}{2}\right)$ mit $a = 20$, also $t_m = 20\ln(10)$.

Blutalkoholkonzentration zu diesem Zeitpunkt:

$$\begin{aligned} f_{20}(20\ln(10)) &= \frac{1}{3}\left(1 - e^{-\ln(10)}\right) - \frac{1}{30}\ln(10) \\ &= \frac{9 - \ln(10)}{30} \approx 0{,}223 \end{aligned}$$

Die höchste Blutalkoholkonzentration beträgt ca. 0,223 Promille.

Aufgabe b (2)

$$f(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-\frac{1}{20}t}\right) - \frac{1}{600}t = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600}t + \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600}t + \frac{1}{3}\right)dt &= \frac{20}{3}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{1200}t^2 + \frac{1}{3}t + c \\ &= \frac{1}{3}\left(20e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{400}t^2 + t\right) + c \end{aligned}$$

Für $c = 0$ ergibt sich die Stammfunktion
$F(t) = \frac{1}{3}\left(20e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{400}t^2 + t\right)$.

Aufgabe b (3)

1. SCHRITT: $\frac{F(140)-F(0)}{140}$ BERECHNEN

$$\frac{F(140) - F(0)}{140} = \frac{20e^{-7} - 49 + 140 - 20}{420} \approx 0{,}169.$$

2. SCHRITT: INTERPRETATION

Es ist

$$\frac{F(140)-F(0)}{140}=\int_0^{140} f_{20}(t)\mathrm{d}t,$$

also die mittlere Alkoholkonzentration im Blut während der ersten 140 Minuten seit der Alkoholaufnahme.

Aufgabe b (4)

$$f(140)=\frac{1}{3}(1-e^{-7})-\frac{140}{600}\approx 0{,}099696$$

Nach 140 Minuten beträgt die Blutalkoholkonzentration etwa 0,1 ‰.

Aufgabe c (1)

1. SCHRITT: STETIGKEITSBEDINGUNG AUFSTELLEN

Voraussetzung dafür, dass die Funktion h differenzierbar ist, ist ihre Stetigkeit. Das heißt, es muss gelten:

$$\lim_{t\nearrow 140} h(t)=\lim_{t\searrow 140} h(t)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\nearrow 140} f(t)=f(140)=\lim_{t\searrow 140} g(t).$$

Dabei ist

$$\lim_{t\searrow 140} g(t)=\lim_{t\searrow 140} u\cdot e^{-v\cdot t}=u\cdot e^{-140v},$$

d. h. es muss $u\cdot e^{-140v}=f(140)$ gelten.

2. SCHRITT: DIFFERENZIERBARKEITSBEDINGUNG AUFSTELLEN

Nachdem f und g beide bei $t=140$ differenzierbar sind, ist h genau dann dort differenzierbar, wenn $f'(140)=g'(140)$ ist. Dabei ist

$$g'(t)=-u\cdot v\cdot e^{-v\cdot t}.$$

Somit lautet die Bedingung für die Differenzierbarkeit von h:

$$-u\cdot v\cdot e^{-140v}=f'(140)$$

3. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM LÖSEN

Die Parameter u und v sind so zu bestimmen, dass

I: $u\cdot e^{-140v}=f(140)$ und
II: $-u\cdot v\cdot e^{-140v}=f'(140)$ gilt.

Dabei ist

$f(140) = \frac{1}{3}(1 - e^{-7}) - \frac{7}{30} = \frac{3 - 10e^{-7}}{30} \approx 0{,}099696$ (s.o.) und

$f'(140) = \frac{1}{60} e^{-\frac{1}{20} \cdot 140} - \frac{1}{600} = \frac{1}{60} e^{-7} - \frac{1}{600} = \frac{10e^{-7} - 1}{600} \approx -0{,}0016515,$

d. h. wir können II durch I teilen und erhalten

$$-v = \frac{f'(140)}{f(140)}$$

$$\Rightarrow v = -\frac{f'(140)}{f(140)} = \frac{1 - 10e^{-7}}{600} \cdot \frac{30}{3 - 10e^{-7}} = \frac{1 - 10e^{-7}}{60 - 200e^{-7}} = \frac{e^7 - 10}{60e^7 - 200}$$

$\approx 0{,}01656504.$

Setzt man diesen Wert für v in I ein, so ergibt sich

$u \cdot e^{-140 \cdot 0{,}01656504} \approx f(140) \Rightarrow u \approx f(140) \cdot e^{2{,}3191056} \approx 1{,}013568.$

Auf fünf Nachkommastellen gerundet ergibt sich also

$v \approx 0{,}01657$ und $u \approx 1{,}01357.$

Aufgabe c (2)

1. SCHRITT: DIFFERENZIERBARKEITSBEDINGUNG AUFSTELLEN

Nachdem f' und g' beide bei $t = 140$ differenzierbar sind, ist h' genau dann dort differenzierbar, wenn $f''(140) = g''(140)$ ist. Es ist aber

$$f''(t) = -\frac{1}{1200} e^{-\frac{1}{20}t} < 0 \text{ und } g''(t) = u \cdot v^2 \cdot e^{-v \cdot t} > 0,$$

da $u > 0$ und $v > 0$.

Somit kann die grüne Bedingung unmöglich erfüllt sein, d. h. h' ist bei $t = 140$ nicht differenzierbar und h somit nicht zweimal differenzierbar.

Aufgabe c (3)

1. SCHRITT: STELLEN DER GRÖßTEN ZU- BZW. ABNAHME

Die schnellste Zunahme der Blutalkoholkonzentration entspricht dem positiven Maximum von h'. Es ist $g'(t) = -u \cdot v \cdot e^{-v \cdot t} < 0$ wegen $u > 0$ und $v > 0$, d. h. das positive Maximum von h' kann nur im Bereich $0 \leq t \leq 140$ angenommen werden, wo h durch f und nicht durch g gegeben ist. Wegen $f''(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (s.o.) ist h dort rechtsgekrümmt, so dass die maximale Steigung am linken Rand des Definitionsbereichs angenommen wird, d. h. bei $t = 0$.

Die schnellste Abnahme der Blutalkoholkonzentration entspricht dem negativen Minimum von h'. Wegen $f''(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (s.o.) ist h im Bereich $0 \leq t \leq 140$ rechtsgekrümmt und wegen $g''(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$

(s.o.) ist h für $t > 140$ linksgekrümmt. Die Steigung nimmt also bis $t = 140$ ab und wird danach wieder größer, d. h. die kleinste Steigung wird bei $t = 140$ angenommen.

2. SCHRITT: BERECHNUNG DER LOKALEN ÄNDERUNGSRATEN

Die momentane Änderungsrate der Blutalkoholkonzentration zum Zeitpunkt der schnellsten Zunahme ist

$h'(0) = f'(0) = \frac{1}{60} - \frac{1}{600} = \frac{3}{200} = 0{,}015$ [Promille pro Minute].

Die momentane Änderungsrate der Blutalkoholkonzentration zum Zeitpunkt der schnellsten Abnahme ist

$g'(140) = f'(140) = \frac{10e^{-7} - 1}{600} \approx -0{,}00165$ [Promille pro Minute] (s.o.).