

**Aufgabe 7:** Stochastik (WTR)

Abitur Mathematik: Musterlösung

**Prüfungsteil 2, Aufgabe 8**  
**Stochastik**

Nordrhein-Westfalen 2012 GK

**Aufgabe a (1) und (2)****1. SCHRITT: VERTEILUNG ANGEBEN**

Da die Anzahl der Wahlberechtigten sehr viel größer ist, als die betrachteten Stichproben (höchstens 200), kann näherungsweise davon ausgegangen werden, dass die Zufallsgröße  $X$  jeweils binomialverteilt ist mit Parametern  $n$  (Anzahl der zufällig ausgewählten Wahlberechtigten) und  $p$  (Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Wahlberechtigte die genannte Partei wählen würde).

$$(1): n = 100 \quad p = 0,25 \quad k \geq 30$$

$$(2): n = 200 \quad p = 0,1 \quad 8 \leq k \leq 18$$

**2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITEN ERMITTELN**

Bei (1) ist der Stichprobenumfang  $n = 100$ , bei (2) ist  $n = 200$ . Mit Hilfe der kumulativen Verteilungstabellen ergibt sich

$$P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 29) \approx 1 - 0,8505 = 0,1495 \text{ für (1)}$$

und

$$P(8 \leq X \leq 18) = P(X \leq 18) - P(X \leq 7) \approx 0,3724 - 0,0005 = 0,3719 \text{ für (2).}$$

**Aufgabe a (3)****SITUATION MODELLIEREN**

Annahmen:

- Es werden  $n$  Wahlberechtigte unabhängig voneinander befragt.
- Für jede Befragung gibt es genau zwei mögliche Ausgänge: „Befragter würde CDU wählen“ oder „Befragter würde nicht CDU wählen“.

**Aufgabe 7:** Stochastik (WTR)

- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Befragter die CDU wählen würde, beträgt bei jeder Befragung 36 %.

Die Anzahl  $X$  der CDU-Wähler unter den Befragten ist somit binomialverteilt zu den Parametern  $n$  und  $p = 0,36$ .

Gesucht ist das kleinste  $n \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, dass

$P(X \geq 1) \geq 90\%$  gilt. Dabei ist:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,36^0 \cdot 0,64^n = 1 - 0,64^n.$$

Die zu erfüllende Ungleichung lautet also

$$1 - 0,64^n \geq 0,9 \quad | -0,9 + 0,64^n$$

$$0,64^n \leq 0,1 \quad | \text{logarithmieren}$$

$$\ln(0,64^n) \leq \ln(0,1) \quad | \text{Logarithmengesetz anwenden}$$

$$n \cdot \ln(0,64) \leq \ln(0,1) \quad | : \ln(0,64)$$

$$n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,64)} \approx 5,16$$

Die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist 6.

Um mit 90 %iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen CDU-Wähler zu finden, müssen mindestens 6 Wahlberechtigte befragt werden.

**Aufgabe a (4)****1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN**

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer fest vorgegebenen Reihenfolge genau drei von sieben angerufenen Wahlberechtigten CDU-Wähler sind, beträgt

$$0,36^3 \cdot 0,64^4.$$

Es gibt fünf Reihenfolgen, bei denen die drei CDU-Wähler direkt hintereinander befragt werden (die Position des 3. CDU-Wählers kann bei 3, 4, 5, 6 oder 7 sein). Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$5 \cdot 0,36^3 \cdot 0,64^4 \approx 0,039 = 3,9\%.$$

**Aufgabe b****1. SCHRITT: 95 %-KONFIDENZINTERVALL FÜR  $p_G$  BESTIMMEN**

Sei  $p_G$  der Anteil der Wähler, die sich am nächsten Sonntag für die Grünen entscheiden würden. Sei ferner  $X$  die Anzahl der Grünen-Wähler unter den 1352 Befragten.  $X$  wird als binomialverteilt zu den Parametern  $n = 1352$  und  $p_G$  angenommen.

Dementsprechend ist der Erwartungswert von  $X$

$$\mu = E(X) = n \cdot p_G = 1352 \cdot p_G$$

und sofern die Laplace-Bedingung erfüllt ist, gilt laut Tabelle 1 ( $\sigma$ -Regeln)

$$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95, \text{ d. h.}$$

$$P(|X - \mu| \leq 1,96\sigma) \approx 0,95 \Leftrightarrow P\left(\left|\frac{X}{n} - p_G\right| \leq \frac{1,96\sigma}{n}\right) \approx 0,95.$$

Gesucht ist ein Teilintervall  $K_G \subset [0; 1]$ , das (in einem geeigneten Sinne) mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit  $p_G$  enthält. Gemeint ist:  $K_G$  enthält genau die Schätzwerte  $p \in [0; 1]$ , für die das Ereignis  $\frac{X}{n} \approx 10\%$ , das bei der Umfrage eingetreten ist, die Bedingung  $\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \frac{1,96\sigma}{n}$  erfüllt, d. h. es muss  $|0,1 - p| \leq \frac{1,96\sigma}{n}$  gelten.

Dabei ist  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$  die Standardabweichung der Binomialverteilung zu den Parametern  $n$  und  $p$ .

Durch Einsetzen von  $n = 1352$  und  $\sigma = \sqrt{1352 \cdot p \cdot (1 - p)}$  ergibt sich:

$$|0,1 - p| \leq \frac{1,96}{1352} \cdot \sqrt{1352 \cdot p \cdot (1 - p)}$$

$$(0,1 - p)^2 \leq \frac{3,8416}{1352} \cdot p \cdot (1 - p) = \frac{3,8416}{1352} \cdot (p - p^2)$$

$$0,01 - 0,2p + p^2 \leq cp - cp^2 \quad \left(\text{mit } c = \frac{3,8416}{1352}\right)$$

$$(c + 1)p^2 - (c + 0,2)p + 0,01 \leq 0$$

Die Grenzen des gesuchten Konfidenzintervalls sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(c + 1)p^2 - (c + 0,2)p + 0,01 = 0,$$

also nach der quadratischen Lösungsformel (mit  $c = \frac{3,8416}{1352}$ ):

$$p_1 = \frac{c + 0,2 - \sqrt{(c + 0,2)^2 - 4 \cdot (c + 1) \cdot 0,01}}{2 \cdot (c + 1)}$$

$$\approx 0,08512$$

und:

$$p_2 = \frac{c + 0,2 + \sqrt{(c + 0,2)^2 - 4 \cdot (c + 1) \cdot 0,01}}{2 \cdot (c + 1)}$$

$$\approx 0,1171.$$

Somit ist  $K_G = [0,0851; 0,1171]$  näherungsweise ein 95 %-Konfidenzintervall für  $p_G$ .

## Aufgabe c

### 1. SCHRITT: 95 %-KONFIDENZINTERVALL FÜR $p_G$ BESTIMMEN

Sei  $p_F$  der Anteil der Wähler, die sich am nächsten Sonntag für die FDP

**Prüfungsteil 2:**

**Stochastik**

entscheiden würden. Sei ferner  $X$  die Anzahl der FDP-Wähler unter den 1352 Befragten.  $X$  wird als binomialverteilt zu den Parametern  $n = 1352$  und  $p_F$  angenommen.

Dementsprechend ist der Erwartungswert von  $X$

$$\mu = E(X) = n \cdot p_F = 1352 \cdot p_F$$

und sofern die Laplace-Bedingung erfüllt ist, gilt laut Tabelle 1 ( $\sigma$ -Regeln)

$$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95, \text{ d. h.}$$

$$P(|X - \mu| \leq 1,96\sigma) \approx 0,95 \Leftrightarrow P\left(\left|\frac{X}{n} - p_F\right| \leq \frac{1,96\sigma}{n}\right) \approx 0,95.$$

Gesucht ist ein Teilintervall  $K_F \subset [0; 1]$ , das (in einem geeigneten Sinne) mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit  $p_F$  enthält. Gemeint ist:  $K_F$  enthält genau die Schätzwerte  $p \in [0; 1]$ , für die das Ereignis  $\frac{X}{n} \approx 14,6\%$ , das bei der Wahl eingetreten ist, die Bedingung  $\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \frac{1,96\sigma}{n}$  erfüllt, d. h. es muss  $|0,146 - p| \leq \frac{1,96\sigma}{n}$  gelten.

Dabei ist  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$  die Standardabweichung der Binomialverteilung zu den Parametern  $n$  und  $p$ .

Durch Einsetzen von  $n = 1352$  und  $\sigma = \sqrt{1352 \cdot p \cdot (1 - p)}$  ergibt sich:

$$|0,146 - p| \leq \frac{1,96}{1352} \cdot \sqrt{1352 \cdot p \cdot (1 - p)}$$

$$(0,146 - p)^2 \leq \frac{3,8416}{1352} \cdot p \cdot (1 - p) = \frac{3,8416}{1352} \cdot (p - p^2)$$

$$0,021316 - 0,292p + p^2 \leq cp - cp^2 \quad \left(\text{mit } c = \frac{3,8416}{1352}\right)$$

$$(c + 1)p^2 - (c + 0,292)p + 0,021316 \leq 0$$

Die Grenzen des gesuchten Konfidenzintervalls sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(c + 1)p^2 - (c + 0,292)p + 0,021316 = 0,$$

also nach der quadratischen Lösungsformel (mit  $c = \frac{3,8416}{1352}$ ):

$$p_1 = \frac{c + 0,292 - \sqrt{(c + 0,292)^2 - 4 \cdot (c + 1) \cdot 0,021316}}{2 \cdot (c + 1)}$$

$$\approx 0,1282$$

und:

$$p_2 = \frac{c + 0,292 + \sqrt{(c + 0,292)^2 - 4 \cdot (c + 1) \cdot 0,021316}}{2 \cdot (c + 1)}$$

$$\approx 0,1658.$$

Somit ist  $K_F = [0,1282; 0,1658]$  näherungsweise ein 95 %-Konfidenzintervall für  $p_F$ .

Der Umfragewert von 13 % liegt in diesem Konfidenzintervall, ist also mit 95 %iger Sicherheit verträglich mit dem Wahlergebnis. Insbesondere wird

die Behauptung, dass die Kurzsensschlossenheit die Wähler die Aussagekraft von Umfragen zunichte mache, nicht bestätigt.

Für kleine Abweichung des Umfrageergebnisses vom Wahlergebnis können durchaus andere Ursachen verantwortlich sein als die Kurzsensschlossenheit der Wähler.

## Aufgabe d

### 1. SCHRITT: MINDESTUMFANG DER STICHPROBE BESTIMMEN

Die Sicherheitswahrscheinlichkeit für einen Schätzwert  $p > 0,1$  aus der Umfrage ist

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right),$$

wobei  $\varepsilon$  der Fehlerbereich ist. Für kleine Parteien mit  $p \approx 10\%$  wird  $\varepsilon \approx 0,02$  angegeben.

Da die Sicherheitswahrscheinlichkeit 90% sein soll, ergibt sich für  $p = 0,15$  zum Beispiel die Bedingung

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - 0,15\right| \leq 0,02\right) \geq 0,9.$$

Wenn wir davon ausgehen, dass die Laplace-Bedingung  $\sigma > 3$  erfüllt ist, dann können wir die  $\sigma$ -Regeln anwenden:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - 0,15\right| \leq \frac{1,64\sigma}{n}\right) \approx 0,9.$$

Die gewünschte grüne Ungleichung ist also näherungsweise erfüllt, wenn

$$\frac{1,64\sigma}{n} \leq 0,02, \text{ also } \frac{\sigma}{n} \leq \frac{0,02}{1,64} = \frac{1}{82} \approx 0,0122 \text{ ist.}$$

Dabei ist  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (p - 1)} = \sqrt{n \cdot 0,15 \cdot 0,85} = \sqrt{0,1275 \cdot n}$ . Setzt man das in die Bedingung  $\frac{\sigma}{n} \leq \frac{1}{82}$  ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{0,1275}{n}} &\leq \frac{1}{82} \\ \Leftrightarrow \frac{0,1275}{n} &\leq \frac{1}{82^2} = \frac{1}{6724} \\ \Leftrightarrow n &\geq 0,1275 \cdot 6724 = 875,31 \end{aligned}$$

Es müssen also mindestens 876 Personen befragt werden.

### 2. SCHRITT: ZUSAMMENHANG ERKLÄREN

Je höher die Sicherheitswahrscheinlichkeit, desto breiter ist (bei festem Stichprobenumfang  $n$ ) das dazugehörige Konfidenzintervall. Das heißt, eine hohe Sicherheitswahrscheinlichkeit verringert die Genauigkeit der Prognose. Man kann die Genauigkeit bei gegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit jedoch verbessern, indem man den

**Prüfungsteil 2:****Stochastik**

Stichprobenumfang erhöht. Je größer  $n$  ist, desto kleiner wird das Konfidenzintervall.