Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 7 Stochastik

Nordrhein-Westfalen 2012 GK

Aufgabe a

1. SCHRITT: VERTEILUNG ANGEBEN

Da die Anzahl der Handybesitzer sehr viel größer ist, als die betrachteten Stichproben (höchstens 200), kann näherungsweise davon ausgegangen werden, dass die Anzahl X_n derer, die ein Smartphone besitzen, binomialverteilt ist mit Parametern n (Anzahl der zufällig ausgewählten Handybesitzer) und $p = \frac{1}{6}$ (Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Handybesitzer ein Smartphone hat).

E_1: $n = 100 \quad p = \frac{1}{6} \quad k = 15$

E_2: $n = 200 \quad p = \frac{1}{6} \quad k \geq 25$

E_3: $n = 200 \quad p = \frac{1}{6} \quad 32 \leq k \leq 38$

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITEN ERMITTELN

Beim Ereignis E_1 ist der Stichprobenumfang $n = 100$, bei E_2 und E_3 ist $n = 200$. Mit Hilfe der Bernoulli-Formel und die kumulativen Verteilungstabellen ergibt sich

$$P(\mathrm{E}_1) = P(X_{100} = 15) = \binom{100}{15} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{85} \approx 0{,}1,$$

$$P(\mathrm{E}_2) = P(X_{200} \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \approx 1 - 0{,}0426 = 0{,}9574 \text{ und}$$

$$P(\mathrm{E}_3) = P(32 \leq X \leq 38) = P(X \leq 38) - P(X \leq 31)$$
$$\approx 0{,}8369 - 0{,}3711 = 0{,}4658.$$

Aufgabe b (1)

Unter der Annahme, dass die Geräte unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit 0,04 defekt sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde zweimal hintereinander ein defektes Gerät bekommt,

$0{,}04 \cdot 0{,}04 = 0{,}0016.$

Aufgabe b (2)

SITUATION MODELLIEREN

Annahmen:

- Es werden n Geräte unabhängig voneinander kontrolliert.
- Für jede Kontrolle gibt es genau zwei mögliche Ausgänge: „fehlerhaft“ oder „nicht fehlerhaft“.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät fehlerhaft ist, beträgt bei jeder Kontrolle 4 %.

Die Anzahl X der fehlerhaften Geräte ist somit binomialverteilt zu den Parametern n und $p = 0{,}04$.

Gesucht ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$P(X \geq 1) \geq 99$ % gilt. Dabei ist:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^n = 1 - 0{,}96^n.$

Die zu erfüllende Ungleichung lautet also

$1 - 0{,}96^n \geq 0{,}99$ $\quad | -0{,}99 \ + 0{,}96^n$

$0{,}96^n \leq 0{,}01$ $\quad |$ logarithmieren

$\ln(0{,}96^n) \leq \ln(0{,}01)$ $\quad |$ Logarithmengesetz anwenden

$n \cdot \ln(0{,}96) \leq \ln(0{,}01)$ $\quad | : \ln(0{,}96)$

$$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}96)} \approx 112{,}8$$

Die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist 113.

Um mit 99 %iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein fehlerhaftes Gerät zu finden, müssen mindestens 113 Geräte kontrolliert werden.

Aufgabe c

1. SCHRITT: σ-UMGEBUNG VON μ FÜR $p = 0{,}04$ BERECHNEN

Für $p = 0{,}04$ ist der Erwartungswert für die Anzahl Y der defekten Smartphones

$E_{0{,}04}(Y) = 200 \cdot 0{,}04 = 8$

und die Standardabweichung

$\sigma_{0{,}04} = \sqrt{200 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} \approx 2{,}77$

Die σ-Umgebung von μ ist also in diesem Fall das Intervall
$[\mu - \sigma; \mu + \sigma] \approx [5{,}23; 10{,}77]$.

2. SCHRITT: σ-UMGEBUNG VON μ FÜR $p = 0{,}02$ BERECHNEN

Für $p = 0{,}02$ ist der Erwartungswert für die Anzahl Y der defekten Smartphones

$E_{0{,}04}(Y) = 200 \cdot 0{,}02 = 4$

und die Standardabweichung

$\sigma_{0{,}04} = \sqrt{200 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98} \approx 1{,}98$

Die σ-Umgebung von μ ist also in diesem Fall das Intervall
$[\mu - \sigma; \mu + \sigma] \approx [2{,}02; 5{,}98]$.

3. SCHRITT: SCHLUSSFOLGERUNG

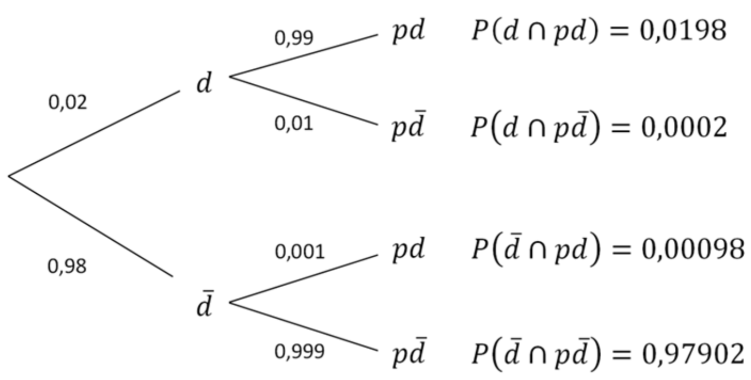
Die Anzahl 6 der defekten Geräte in der Stichprobe liegt in der σ-Umgebung für die Ausschussquote 4 %, nicht aber in der σ-Umgebung für die Ausschussquote 2 %. Somit ist die Wahrscheinlichkeit größer, dass die Stichprobe aus der Produktion mit Ausschussquote 4 % stammt.

Aufgabe d (1)

1. SCHRITT: BEZEICHNUNGEN FESTLEGEN

d	defekt
$\bar{d}$	nicht defekt
pd	vom Prüfgerät als defekt eingestuft
$p\bar{d}$	vom Prüfgerät nicht als defekt eingestuft

2. SCHRITT: BAUMDIAGRAMM ZEICHNEN



Aufgabe d (2)

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist nach der Pfadadditionsregel

$P(pd) = P(d \cap pd) + P(\bar{d} \cap pd) = 0{,}0198 + 0{,}00098 = 0{,}02078.$

Aufgabe d (3)

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Smartphone vom Prüfgerät als defekt eingestuft wird, unter der Bedingung, dass das Smartphone nicht defekt ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist

$$P_{pd}(\bar{d}) = \frac{P(pd \cap \bar{d})}{P(pd)} = \frac{0{,}00098}{0{,}02078} \approx 0{,}04716,$$

da nach Aufgabe d) (3) $P(pd) = 0{,}02078$ ist.

Aufgabe e (1)

1. SCHRITT: ANNAHME- UND ABLEHNUNGSBEREICH FÜR H_0 FESTLEGEN

Sei X die Anzahl der defekten Smartphones in der Stichprobe. X ist binomialverteilt zu den Parametern p und $n = 1000$.

Nullhypothese: $H_0: p \leq 0{,}01$

H_0 soll angenommen werden, wenn höchstens k_0 defekte Smartphones gefunden werden.

Gesucht ist das kleinste $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k_0 \leq 1000$, so dass für jedes $p \leq 0{,}01$ $P(X > k_0) \leq 0{,}05$, also $P(X \leq k_0) \geq 0{,}95$ gewährleistet ist. Die Ungleichung $P(X \leq k_0) \geq 0{,}95$ ist genau dann für jedes $p \leq 0{,}01$ erfüllt, wenn sie für $p = 0{,}01$ gilt, denn $P(X \leq k_0)$ wird umso kleiner, je größer p wird.

Aus Tabelle 6 (kumulierte Binomialverteilung für $n = 1000$, Spalte für $p = 0{,}01$) entnimmt man $P(X \leq 14) \approx 0{,}9176$ und $P(X \leq 15) \approx 0{,}9521$. Somit ist $k_0 = 15$.

Die Entscheidungsregel lautet also wie folgt:

Die Nullhypothese $p \leq 0{,}01$ soll angenommen werden, wenn höchstens 15 defekte Smartphones in der Stichprobe sind. Falls mehr als 15 defekte Smartphones gezählt werden, soll davon ausgegangen werden, dass der Anteil der defekten Smartphones über 0,01 % liegt.

Aufgabe e (2)

1. SCHRITT: DIE FEHLER 1. UND 2. ART ALLGEMEIN BESCHREIBEN

Fehler 1. Art: Die Nullhypothese trifft zu, die Testgröße landet aber im

Ablehnungsbereich, so dass man die Nullhypothese irrtümlich ablehnt.

Fehler 2. Art: Die Nullhypothese trifft nicht zu, die Stichprobe fällt aber so aus, dass man sich für die Annahme der Nullhypothese entscheidet.

2. SCHRITT: DIE BEDEUTUNG DER BEIDEN FEHLER IM SACHZUSAMMENHANG

Im vorliegenden Fall besteht der Fehler 1. Art darin, dass die Ausschussquote der Smartphones tatsächlich bei maximal einem Prozent liegt, der Händler aber unter den 1000 getesteten Geräten mehr als15 defekte Geräte findet, er also der Aussage der Firma keinen Glauben schenkt.

Der Fehler 2. Art tritt auf, wenn es weiterhin mehr als 1 % defekte Smartphones gibt, aber unter den getesteten Geräten höchstens 15 defekt sind. Der Händler akzeptiert dann die Aussage der Firma und die damit einhergehende Preiserhöhung.