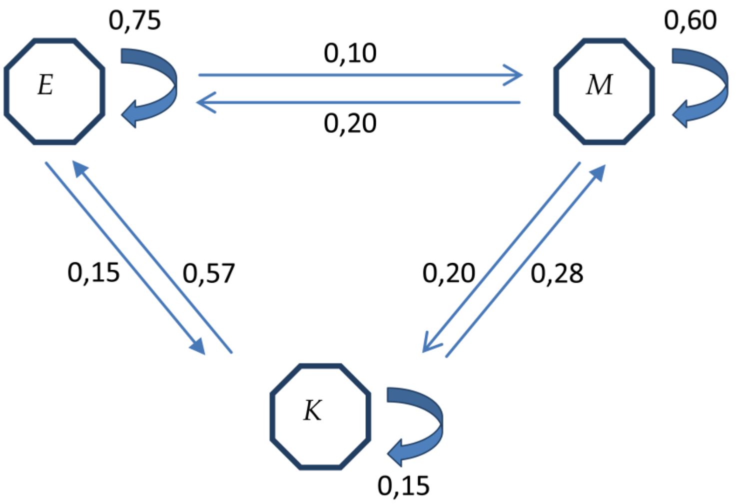
Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 6 Lineare Algebra

Nordrhein-Westfalen 2012 GK

Aufgabe a

1. SCHRITT: ÜBERGANGSDIAGRAMM ZEICHNEN



2. SCHRITT: ÜBERGANGSMATRIX ERSTELLEN

von: / nach:	E	M	K
E	0,75	0,2	0,57
M	0,10	0,6	0,28
K	0,15	0,2	0,15

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

Aufgabe b (1)

1. SCHRITT: MATRIZEN GEGENÜBERSTELLEN

	von: E M K
nach: E, M, K	$A_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix}$

	von: E M K
nach: E, M, K	$A_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

2. SCHRITT: ÄNDERUNGEN ABLESEN

Von den Kunden, die einmal im Jahr einen Urlaub buchen, ist der Anteil derer, die im Folgejahr auf ihren Urlaub verzichten, kleiner geworden. Stattdessen bleiben mehr von ihnen bei einem Urlaub im Jahr.

Von denen, die keinen Urlaub buchen, gehen im Vergleich zu früher mehr im Folgejahr wieder einmal oder mehrmals auf Reisen.

Aufgabe b (2)

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 2624 + 0{,}2 \cdot 1206 + 0{,}6 \cdot 570 \\ 0{,}1 \cdot 2624 + 0{,}6 \cdot 1206 + 0{,}3 \cdot 570 \\ 0{,}1 \cdot 2624 + 0{,}2 \cdot 1206 + 0{,}1 \cdot 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2682{,}4 \\ 1157 \\ 560{,}6 \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2012 buchen etwa 2682 Kunden genau eine Reise und 1157 mehrere Reisen. Etwa 561 Stammkunden melden sich im Jahr 2012 nicht bei dem Reisebüro.

Aufgabe b (3)

1. SCHRITT: VERTEILUNG FÜR DAS JAHR 2010 BESTIMMEN

Gesucht ist der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

I: $0{,}8x + 0{,}2y + 0{,}6z = 2624$
II: $0{,}1x + 0{,}6y + 0{,}3z = 1206$
III: $0{,}1x + 0{,}2y + 0{,}1z = 570$

$\mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{III}: -0{,}2x = -504 \Longrightarrow x = \frac{504}{0{,}2} = 2520.$

$\mathrm{I} - 2 \cdot \mathrm{II}: 0{,}6x - y = 212$

$\Longrightarrow x_2 = 0{,}6x - 12 = 0{,}6 \cdot 2520 - 212 = 1300.$

$\mathrm{II} - \mathrm{III}: 0{,}4y + 0{,}2z = 636$

$\Longrightarrow z = 5 \cdot 636 - 5 \cdot 0{,}4y = 3180 - 2y = 3180 - 2 \cdot 1300 = 580.$

Im Jahr 2010 buchten 2520 Stammkunden genau eine, 1300 mehrere und 580 keine Reise.

Aufgabe c

1. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM AUFSTELLEN

Gesucht ist der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

I: $-0{,}2x + 0{,}2y + 0{,}6z = 0$
II: $0{,}1x - 0{,}4y + 0{,}3z = 0$
III: $0{,}1x + 0{,}2y - 0{,}9z = 0$

2. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM LÖSEN

$\mathrm{I} + 2 \cdot \mathrm{II}: -0{,}6y + 1{,}2z = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1{,}2z}{0{,}6} = 2z$

Dies in I eingesetzt liefert

$-0{,}2x + 0{,}4z + 0{,}6z = 0 \Leftrightarrow -0{,}2x + z = 0 \Leftrightarrow x = 5z.$

Einsetzen von $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$ in die Gleichungen I, II und III zeigt, dass dieser Vektor für jedes $z \in \mathbb{R}$ eine Lösung des obigen linearen Gleichungssystems ist.

3. SCHRITT: z BESTIMMEN

Die Anzahl der Kunden soll weiterhin bei 4400 bleiben, wie in Teil b) (2). Also muss auch für den eben bestimmten Vektor

$x + y + z = 5z + 2z + z = 8z = 4400$ gelten, d. h. $z = \frac{4400}{8} = 550.$

Somit ergibt sich die stationäre Verteilung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 550 \\ 2 \cdot 550 \\ 550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2750 \\ 1100 \\ 550 \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der Kunden und ihre Verteilung auf die Gruppen E, M und K bleiben gleich, wenn in einem Jahr 2750 Kunden genau einen Urlaub buchen, 1100 Kunden mehrmals einen Urlaub buchen und 550 Kunden keinen Urlaub buchen.

Aufgabe d (1)

Das Buchungsverhalten der Kunden der Gruppen E und M bleibt unverändert, das heißt, die Spalten unter E und unter M bleiben ebenfalls unverändert.

Wir bezeichnen den Anteil der Gruppe K, der zu E wechselt mit q, $q \geq 0$. Das ist der Eintrag b_{13} der Matrix B. Da genau 5 % der Kunden in Gruppe K im Folgejahr wieder keinen Urlaub buchen, ist der Eintrag b_{33} der Übergangsmatrix gleich 0,05. Da jeder der Kunden aus K im Folgejahr in genau einem der Gruppen E, M und K landet, addieren sich die entsprechenden Anteile zu 1, d. h. $b_{13} + b_{23} + b_{33} = q + b_{23} + 0{,}05 = 1$. Daraus folgt $b_{23} = 0{,}95 - q$ und wegen $b_{23} \geq 0$ ist $q \leq 0{,}95$.

Somit ergibt sich die angegebene Übergangsmatrix B.

Aufgabe d (2)

1. SCHRITT: GLEICHUNG AUFSTELLEN

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95 - q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2699 \\ M \\ K \end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: q BERECHNEN

Die erste Koordinate des Produktes errechnet sich wie folgt:

$$0{,}8 \cdot 2624 + 0{,}2 \cdot 1206 + 570 \cdot q = 2699$$

$$\Longrightarrow q = \frac{2699 - 0{,}8 \cdot 2624 - 0{,}2 \cdot 1206}{570} = \frac{358{,}6}{570} \approx 0{,}63.$$