Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 5 Analytische Geometrie

Nordrhein-Westfalen 2012 GK

Aufgabe a (1)

1. SCHRITT: DIE VEKTOREN $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ UND $\overrightarrow{BC}$ BERECHNEN

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: DEN RECHTEN WINKEL NACHWEISEN

Ein Blick auf die Vektoren zeigt, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ gleich lang sind. Das heißt, wenn es einen rechten Winkel gibt, dann wird er von diesen beiden Vektoren gebildet.

Es gilt

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) = 0,$$

also stehen die Seiten $[AB]$ und $[AC]$ senkrecht aufeinander, d. h. das Dreieck hat bei A einen rechten Winkel. Da $[AB]$ und $[AC]$ auch gleich lang sind, handelt es sich um ein gleichschenkliges Dreieck.

Aufgabe a (2)

1. SCHRITT: BILDPUNKTE BERECHNEN

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 \cdot 3 \\ 0{,}8 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 2{,}4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow A'(-1{,}8|2{,}4|2)$

$$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 \cdot 1 + 0{,}8 \cdot (-2) \\ 0{,}8 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}2 \\ -0{,}4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B'(-2{,}2|-0{,}4|2)$

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 \cdot 5 + 0{,}8 \cdot (-2) \\ 0{,}8 \cdot 5 + 0{,}6 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}6 \\ 2{,}8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow C'(-4{,}6|2{,}8|2)$

2. SCHRITT: RECHTEN WINKEL SUCHEN

Es ist

$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -2{,}2 \\ -0{,}4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 2{,}4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ -2{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} -4{,}6 \\ 2{,}8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 2{,}4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}8 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$, also

$$\overrightarrow{A'B'} \circ \overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ -2{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2{,}8 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = (-0{,}4) \cdot (-2{,}8) - (-2{,}8) \cdot 0{,}4 = 0.$$

Das Bilddreieck ist somit ebenfalls rechtwinklig mit rechtem Winkel bei A'.

Bemerkung:

Es kann im Allgemeinen passieren, dass das Bilddreieck zwar wieder rechtwinklig ist, der rechte Winkel aber an einer anderen Ecke liegt.

3. SCHRITT: LÄNGE DER SEITEN [*A'B'*] UND [*A'C'*] BERECHNEN

Wegen $\left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \sqrt{(-0{,}4)^2 + (-2{,}8)^2} = 2\sqrt{2}$ und $\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = \sqrt{(-2{,}8)^2 + 0{,}4^2} = 2\sqrt{2}$ ist das Bilddreieck gleichschenklig.

Aufgabe a (3)

Der Wert der x_3-Koordinate ist sowohl bei den Urpunkten als auch bei den Bildpunkten 2. Das heißt, beide Dreiecke liegen in der Ebene $x_3 = 2$, die parallel zur x_1-x_2-Ebene verläuft.

Aufgabe b (1)

Der Ursprung hat die Koordinaten $(0|0|0)$. Diese Koordinaten erfüllen die Gleichung $2x_1 - x_2 = 0$ für E.

Aufgabe b (2)

2. SCHRITT: NACHWEIS DER NICHTKOLLINEARITÄT

Für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn für die ersten Koordinaten müsste sonst $\lambda \cdot 0 = 1$ gelten. Somit sind diese beiden Vektoren nicht kollinear.

Nicht kollinear bedeutet nicht parallel. Wenn zwei Vektoren parallel sind, dann ist ein Vektor ein Vielfaches des anderen. Du musst also einfach nur zeigen, dass das für die beiden Vektoren $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ nicht der Fall ist:

$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Schon die erste Zeile führt zu dem Widerpruch $0 = 1$.

3. SCHRITT: VEKTOREN ALS RICHTUNGSVEKTOREN ERKENNEN

Die Koordinaten der Punkte $P_1(0|0|1)$ und $P_2(1|2|0)$ erfüllen jeweils die Gleichung $2x_1 - x_2 = 0$ für E, d. h. diese Punkte liegen auf E. Da auch der Ursprung auf E liegt, sind die Vektoren $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{OP_2}$ jeweils Verbindungsvektoren zweier Punkte auf E und somit Richtungsvektoren von E.

Aufgabe b (3)

1. SCHRITT: $f(\overrightarrow{v_1})$ BESTIMMEN

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\Rightarrow f(\overrightarrow{v_1}) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: $f(\overrightarrow{v_2})$ BESTIMMEN

$$f(\overrightarrow{v_2}) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-0{,}6) \cdot 1 + 0{,}8 \cdot 2 \\ 0{,}8 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe b (4)

Jeder Punkt der Ebene wird vom Ursprung aus durch Addition geeigneter Vielfache der Richtungsvektoren erreicht, d. h. er hat einen Ortsvektor der Form

$\overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \overrightarrow{v_1} + \mu \cdot \overrightarrow{v_2}$.

Da f durch eine Matrix gegeben ist und $f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}$ sowie $f(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_2}$ gilt, folgt

$f(\lambda \cdot \overrightarrow{v_1} + \mu \cdot \overrightarrow{v_2}) = \lambda \cdot f(\overrightarrow{v_1}) + \mu \cdot f(\overrightarrow{v_2}) = \lambda \cdot \overrightarrow{v_1} + \mu \cdot \overrightarrow{v_2}$,

d. h. P wird wieder auf P abgebildet.

Aufgabe c (1)

1. SCHRITT: ALLGEMEINEN PUNKT A_g DER GERADEN G BESTIMMEN

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g hat den allgemeinen Punkt $P_g(3 + 2a|1 - a|4)$.

2. SCHRITT: $f(P_g)$ BERECHNEN

$$f(\overrightarrow{OP_g}) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 + 2a \\ 1 - a \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1{,}8 - 1{,}2a + 0{,}8 - 0{,}8a \\ 2{,}4 + 1{,}6a + 0{,}6 - 0{,}6a \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 - 2a \\ 3 + a \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. SCHRITT: ALLGEMEINEN BILDPUNKT ALS GERADENGLEICHUNG ANGEBEN

$x_1 = -1 + a' \cdot (-2)$

$x_2 = 3 + a' \cdot 1$

$x_3 = 4 + a' \cdot 0$

$$g': \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + a' \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. SCHRITT: VERGLEICH DER RICHTUNGSVEKTOREN VON g UND g'

Die beiden Geraden haben die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wegen $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind diese Vektoren kollinear und die beiden Geraden sind daher parallel.

5. SCHRITT: PUNKTPROBE FÜR DEN AUFPUNKT VON g' MIT g MACHEN

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aus der Gleichung für die 1. Koordinate folgt $3 + 2a = -1 \Leftrightarrow a = -2$.
Einsetzen von $a = -2$ liefert die wahre Aussage

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Daher liegt der Aufpunkt von g' auf g. Wegen der Parallelität sind also g und g' identisch.

Aufgabe c (2)

1. SCHRITT: ALLGEMEINEN PUNKT DER GERADEN h BESTIMMEN

Sei $P(p_1|p_2|p_3)$ ein beliebiger Punkt auf h, der als Aufpunkt einer Parametergleichung von h dient. Als Richtungsvektor kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ benutzt werden, da h parallel zu g verläuft. Eine Parametergleichung lautet somit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}$$

und der allgemeine Punkt $P_h(p_1 + 2b|p_2 - b|p_3)$.

2. SCHRITT: BILDGERADE BERECHNEN

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{OP_h}\right) &= \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 + 2b \\ p_2 - b \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0{,}6p_1 - 1{,}2b + 0{,}8p_2 - 0{,}8b \\ 0{,}8p_1 + 1{,}6b + 0{,}6p_2 - 0{,}6b \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0{,}6p_1 + 0{,}8p_2 - 2b \\ 0{,}8p_1 + 0{,}6p_2 + b \\ p_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Geradengleichung der Bildgeraden:

$$h': \vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}6p_1 + 0{,}8p_2 \\ 0{,}8p_1 + 0{,}6p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. SCHRITT: VERGLEICH DER RICHTUNGSVEKTOREN VON h UND h'

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind wieder kollinear, das heißt, die Geraden h und h' sind parallel.

4. SCHRITT: PUNKTPROBE FÜR DEN AUFPUNKT VON h' MIT h MACHEN

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6p_1 + 0{,}8p_2 \\ 0{,}8p_1 + 0{,}6p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Aus der Gleichung für die 1. Koordinate folgt

$$p_1 + 2b = -0{,}6p_1 + 0{,}8p_2 \Leftrightarrow 2b = 0{,}8p_2 - 1{,}6p_1 \Leftrightarrow b = 0{,}4p_2 - 0{,}8p_1.$$

Einsetzen von $b = 0{,}4p_2 - 0{,}8p_1$ liefert die wahre Aussage

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + (0{,}4p_2 - 0{,}8p_1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6p_1 + 0{,}8p_2 \\ 0{,}8p_1 + 0{,}6p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Daher liegt der Aufpunkt von h' auf h. Wegen der Parallelität sind also h und h' identisch.