Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 4 Analytische Geometrie

Nordrhein-Westfalen 2012 GK

Aufgabe a (1)

1. SCHRITT: MITTELPUNKT DER GRUNDFLÄCHE BERECHNEN

Die Spitze befindet sich einen Meter senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M der Grundfläche.

$\overrightarrow{0M} = \overrightarrow{0A} + 0{,}5\overrightarrow{AC}$ mit

$$0{,}5\overrightarrow{AC} = 0{,}5 \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{0M} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow M(4{,}5|4{,}5|1)$

2. SCHRITT: KOORDINATEN DER SPITZE ANGEBEN

Die z-Koordinate ist um eine Einheit größer als die z-Koordinate von M.

Also hat S die Koordinaten $(4{,}5|4{,}5|2)$.

Aufgabe a (2)

1. SCHRITT: DEN VEKTOR $\overrightarrow{AS}$ BERECHNEN

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: LÄNGE DES VEKTORS $\overrightarrow{AS}$ BERECHNEN

$$\left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{(-0{,}5)^2 + 0{,}5^2 + 1} = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}22$$

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter, also ist die Seite $\overline{AS}$ etwa 1,22 m lang.

3. SCHRITT: SEITENLÄNGEN ANGEBEN

Da es sich um eine gerade Pyramide handelt, ist das Dreieck ABS gleichschenklig. Die Seiten $\overline{AS}$ und $\overline{BS}$ sind also jeweils etwa 1,22 m lang. Die Länge der Seite $\overline{AB}$ ist mit 1 m schon angegeben (Seitenlänge der quadratischen Grundfläche).

Aufgabe a (3)

1. SCHRITT: VOLUMEN BERECHNEN

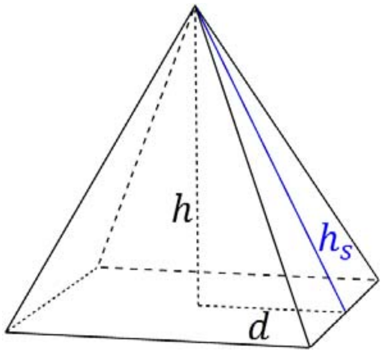
Die Grundfläche G ist ein Quadrat der Seitenlänge 1 m und die Höhe h der Pyramide ist laut Aufgabenstellung auf 1 m. Im Modell ist also

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3},$$

d. h. das Volumen beträgt $\frac{1}{3}$ m³.

2. SCHRITT: DIE HÖHE EINER SEITENFLÄCHE BERECHNEN

Die Oberfläche der Pyramide setzt sich aus der quadratischen Grundfläche und vier kongruenten Dreiecken als Seitenflächen zusammen.
Die Höhe h_s eines dieser Dreiecke bildet mit der Höhe h der Pyramide und einer Strecke d auf der Grundfläche G ein rechtwinkliges Dreieck:



Da es sich um eine gerade vierseitige Pyramide handelt, ist d genau halb so lang wie die Seitenlänge der Grundfläche. Somit ist nach dem Satz des Pythagoras

$$h_s = \sqrt{h^2 + d^2} = \sqrt{1^2 + 0{,}5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1{,}12.$$

3. SCHRITT: OBERFLÄCHENINHALT BERECHNEN

Die Grundseite g einer Seitenfläche beträgt eine Längeneinheit. Der Flächeninhalt einer Seitenfläche ist somit

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{4}\sqrt{5} \approx 0{,}56.$$

Für die Gesamtoberfläche A der Pyramide gilt also

$$A = G + 4 \cdot A_\Delta = 1 + \sqrt{5} \approx 3{,}24.$$

Die Pyramide hat demnach eine Oberfläche von etwa 3,24 m².

Aufgabe b

1. SCHRITT: GERADENGLEICHUNGEN AUFSTELLEN

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die Lichtstrahlen nur die Seitenfläche BCS treffen. Die Eckpunkte des Schattendreiecks sind somit die Schnittpunkte der Geraden b (L_1B), c (L_1C) und s (L_1S) mit der x-z-Ebene.

Dabei ist

$$b\colon \overrightarrow{OL_1} + r \cdot \overrightarrow{L_1B} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R},$$

$$c\colon \overrightarrow{OL_1} + s \cdot \overrightarrow{L_1C} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

und

$$s\colon \overrightarrow{OL_1} + t \cdot \overrightarrow{L_1C} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

2. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE DER GERADEN MIT DER *X-Z*-EBENE BERECHNEN

Die x-z-Ebene hat die Gleichung $y = 0$. Somit gilt für die y-Koordinate des Schnittpunkts von b mit der Wand:

$$9 - 4r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

Analog gilt für die y-Koordinate des Schnittpunkts von c mit der Wand:

$$9 - 4s = 0 \Leftrightarrow s = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

und für die y-Koordinate des Schnittpunkts von s mit der Wand:

$$9 - 4{,}5t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{9}{4{,}5} = 2.$$

Durch Einsetzen dieser Parameter in die entsprechenden Geradengleichungen erhält man

$$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 2{,}25 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}625 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 2{,}25 \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}375 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{OS'} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d. h. die Schattenpunkte sind $B'(5{,}625|0|1)$, $C'(3{,}375|0|1)$ und $S'(4{,}5|0|3)$.

3. SCHRITT: ZWEI SEITENLÄNGEN DES SCHATTENDREIECKS BERECHNEN

Die Abbildung legt nahe, dass $B'S'$ und $C'S'$ gleich lang sind. Wegen

$$\left|\overrightarrow{B'S'}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5{,}625 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1{,}125 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1{,}125)^2 + 2^2}$$

und

$$\left|\overrightarrow{C'S'}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}375 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1{,}125 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(1{,}125)^2 + 2^2} = \left|\overrightarrow{B'S'}\right|$$

ist dies auch tatsächlich der Fall.

4. SCHRITT: FLÄCHENINHALT DES SCHATTENDREIECKS BERECHNEN

Die Grundseite des Schattendreiecks ist die Differenz der x-Koordinaten von B' und C', also $|3{,}375 - 5{,}625| = 2{,}25$. Die zugehörige Höhe ist die Differenz der z-Koordinaten, also $|3 - 1| = 2$.

Somit ist der Flächeninhalt des Schattendreiecks

$$\frac{1}{2} \cdot 2{,}25 \cdot 2 = 2{,}25\ [\mathrm{m}^2].$$

Aufgabe c (1)

1. SCHRITT: MITTELPUNKT *P* DER SEITE [*AB*] BERECHNEN

Die Seitenhalbierende der Seite $[AB]$ geht durch den Mittelpunkt P von $[AB]$ und durch den Punkt S. Dabei ist

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow P(5|4{,}5|1)$

2. SCHRITT: MITTELPUNKT *M* DER SEITENHALBIERENDEN BESTIMMEN

M ist der Mittelpunkt von $[PS]$, also

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OS}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow M(4{,}75|4{,}5|1{,}5)$.

Aufgabe c (2)

1. SCHRITT: RICHTUNGSVEKTOR PRÜFEN

Der Laserstrahl verläuft senkrecht aus die Fläche ABS. Der Vektor $\vec{l}$ ist genau dann ein Richtungsvektor dieses Strahls, wenn er auf die beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$ senkrecht steht.

Dabei ist

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (s.o.) und } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\vec{l} \circ \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-0{,}5) + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 1 = 0$$

und

$$\vec{l} \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.$$

Somit steht $\vec{l}$ senkrecht auf ABS und ist daher ein Richtungsvektor des Laserstrahls.

Da die y-Koordinate des Richtungsvektors $\vec{l}$ null ist, verläuft der Laserstrahl parallel zur x-z-Ebene. Somit kann die Lichtquelle nur an der Wand $x = 9$ oder an der Decke hängen.

2. SCHRITT: GERADENGLEICHUNG DER GERADEN *m* AUFSTELLEN

Der Laserstrahl verläuft entlang der Geraden m mit dem Aufpunkt M und dem Richtungsvektor $\vec{l}$:

$$m: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

3. SCHRITT: SCHNITTPUNKT DER GERADEN MIT DER HALLENWAND BERECHNEN

Die betreffende Hallenwand hat die Gleichung $x = 9$. Setzt man die erste Koordinate der obigen Geradengleichung gleich 9, so ergibt sich

$$4{,}75 + 2\lambda = 9 \Leftrightarrow \lambda = 2{,}125$$

Einsetzen dieses Parameters in die Geradengleichung liefert

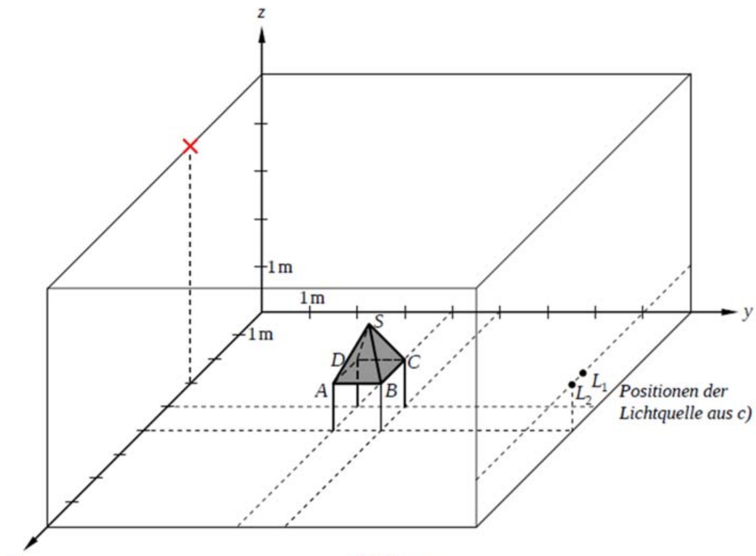
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + 2{,}125 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4{,}5 \\ 3{,}625 \end{pmatrix}.$$

Da die z-Koordinate dieses Punktes kleiner als 5 ist, befindet sich dieser Punkt unterhalb der Decke. Die Position der Laserlichtquelle ist somit der Punkt $(9|4{,}5|, 625)$.

Aufgabe d (1)

1. SCHRITT: AUFPUNKT DER EBENE MARKIEREN

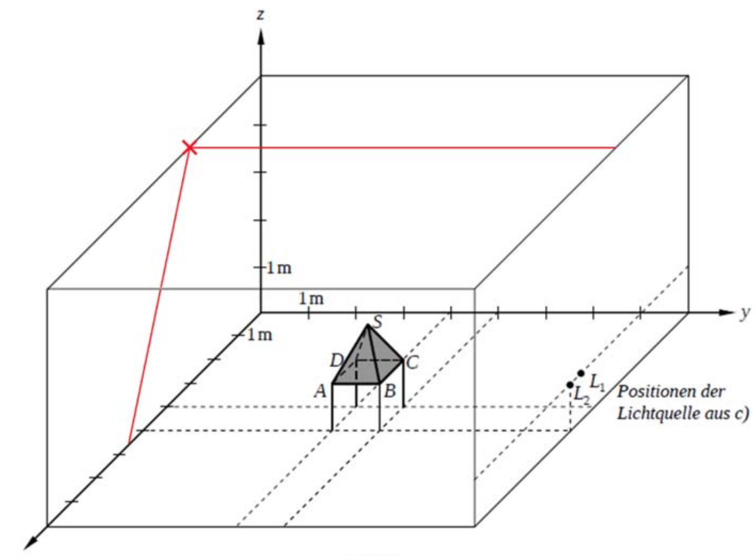
$$E^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Abbildung

2. SCHRITT: RICHTUNGSVEKTOREN ABTRAGEN

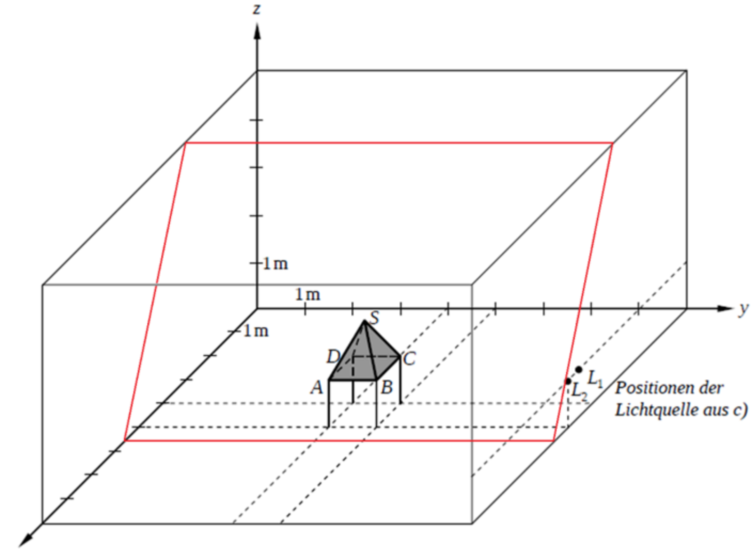
Trägt man die beiden Richtungsvektoren der Ebene vom Aufpunkt aus ab und verlängert sie bis zur nächsten Raumbegrenzung (Wand, Boden oder Decke), so ergibt sich folgendes Bild:



Abbildung

3. SCHRITT: SPUR DES LASERSTRAHLS EINZEICHNEN

Die Spur des Laserstrahls auf den Raumbegrenzungen sieht also wie folgt aus:



Abbildung

Aufgabe d (2)

1. SCHRITT: VORÜBERLEGUNG

Die Strecke $[BS]$ liegt genau dann auf der Schnittgeraden g, wenn beide Endpunkte sowohl auf der Ebene E^* als auch auf E_{BCS} liegen. Dass B und S auf E_{BCS} ist klar, da E_{BCS} das ganze Dreieck BCS enthält.

2. SCHRITT: PRÜFEN, OB B UND S AUF E^* LIEGEN

Zu prüfen bleibt, ob $B(5|5|1)$ und $S(4{,}5|4{,}5|2)$ auf E^* liegen. Das ist genau dann der Fall, wenn es Zahlen r_B, s_B, r_S und s_S gibt, so dass

$\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix} + r_B \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s_B \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}$ und

$\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix} + r_S \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s_S \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4{,}5\\4{,}5\\2\end{pmatrix}$ gilt.

Die 1. Koordinate der ersten Gleichung liefert $3 + s_B = 5 \Leftrightarrow s_B = 2$ und die 2. Koordinate der ersten Gleichung liefert $r_B = 5$.

Die 1. Koordinate der zweiten Gleichung liefert $3 + s_S = 4{,}5 \Leftrightarrow s_S = 1{,}5$ und die 2. Koordinate der zweiten Gleichung liefert $r_S = 4{,}5$.

Einsetzen der gerade berechneten Zahlen r_B, s_B, r_S und s_S in obige Gleichungen liefert wahre Aussagen (die Teilgleichungen für alle drei Koordinaten sind jeweils erfüllt). Also liegen B und S auf E^*, folglich ist die Strecke $[BS]$ ein Abschnitt der Schnittgeraden g (s.o.).